UNIVERSITETI I SHKODRËS «LUIGJ GURAKUQI» · FAKULTETI I SHKENCAVE TË NATYRËS

DEPARTAMENTI I MATEMATIKËS

Derivati i funksionit

Përkufizimi, kuptimi gjeometrik, rregullat e derivimit, diferenciali dhe derivatet e rendeve të larta

Prof. As. Dr. Siditë Duraj

Analizë Matematike I · Bachelor në Informatikë, viti I · 2026–2027

Objektivat e leksionit

Pas këtij leksioni, studenti do të jetë në gjendje:

1. të formulojë përkufizimin e derivatit si limit i raportit të shtesave;
2. të shkruajë ekuacionin e tangjentes dhe të normales;
3. të dallojë derivueshmërinë nga vazhdueshmëria;
4. të derivojë me rregullat e veprimeve, të funksionit të përbërë dhe të anasjelltë;
5. të përdorë diferencialin për llogaritje të përafërta;
6. të gjejë derivate të rendeve të larta.

> **Ku jemi.** Leksioni pararendës: **funksionet e vazhdueshme**. Sot pyesim jo vetëm *nëse* f ndryshon pak, por *sa shpejt* ndryshon.

Teksti bazë: E. Hoxha, A. Stringa, Analiza Matematike 1, kreu për derivatin.

Ushtrime: Hoxha–Stringa, Ushtrime të Analizës Matematike 1, kreu për derivatin.

Pse na duhet derivati?

Dy probleme, një ide.

- **Fizikë:** sa është shpejtësia e një trupi *në një çast*, kur dimë vetëm rrugën $s(t)$?
- **Gjeometri:** si e ndërtojmë *tangjenten* ndaj një kurbe në një pikë?

Të dyja zgjidhen me të njëjtin limit: raportin e ndryshimit të vlerës me ndryshimin e argumentit, kur ky i fundit shkon te zero.

Historia. I. Njutoni (1665–1671, «fluksionet») dhe G. W. Lajbnici (1684, shënimi $\frac{dy}{dx}$) e zbuluan në mënyrë të pavarur; O. Koshi (1823) e mbështeti te limiti.

Në informatikë.

- **Mësimi automatik:** rrjetet neurale «mësojnë» duke ecur në drejtim të kundërt me derivatin e gabimit (gradient descent).
- **Grafika:** kurbat Bézier dhe tangjentet e tyre te fontet dhe vizatimi vektorial.
- **Analiza numerike:** metoda e Njutonit për rrënjët.

Problemi i shpejtësisë së çastit

Le të jetë $s(t)$ **koordinata e pozicionit** të një pike që lëviz në një drejtëz. Në intervalin $[t_0,\, t_0 + \Delta t]$ **zhvendosja** është $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$; ajo nuk është domosdoshmërisht rruga e përshkuar.

Shpejtësia mesatare (me shenjë):

$$v_{\text{mes}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Shpejtësia e çastit:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Moduli $|v(t_0)|$ është shpejtësia skalare.

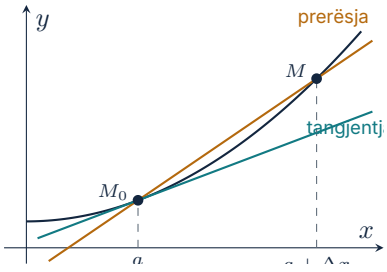
Shembull. Rënia e lirë nga qetësia, me drejtim pozitiv poshtë: $s(t) = \dfrac{g t^2}{2}$.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{g}{2} \cdot \frac{(t_0 + \Delta t)^2 - t_0^2}{\Delta t} = g t_0 + \frac{g\,\Delta t}{2}.$$

Kur $\Delta t \to 0$: $v(t_0) = g\, t_0$.

Shprehja $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ është e trajtës $\dfrac{0}{0}$ kur $\Delta t \to 0$: limiti nuk gjendet me zëvendësim.

Problemi i tangjentes



Prerësja M_0M ka koeficient këndor

$$k_{\text{pr}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$

Kur $M \to M_0$ (pra $\Delta x \to 0$), prerësja rrotullohet rreth M_0 dhe shkon te një pozicion kufi: **tangjentja**.

$$k_{\text{tg}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$

I njëjti limit si te shpejtësia. I japim një emër: **derivat**.

Përkufizimi i derivatit

Le të jetë f e përcaktuar në një rrethinë të pikës a. Shënojmë Δx shtesën e argumentit dhe $\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a)$ shtesën e funksionit.

Përkufizimi 1.1. Në qoftë se ekziston limiti i fundëm

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x},$$

ai quhet **derivati i funksionit** f **në pikën** a, dhe f quhet **e derivueshme** në a.

Trajtë e njëvlershme (me $x = a + \Delta x$):

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Shënime: $f'(a)$, $y'(a)$, $\dfrac{df}{dx}(a)$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=a}$.

Funksioni $x \mapsto f'(x)$ quhet **funksioni derivat**.

Algoritmi i llogaritjes me përkufizim

Hapi 1. Shkruajmë $f(a+\Delta x)$.

Hapi 2. Gjejmë $\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a)$ dhe e thjeshtojmë.

Hapi 3. Formojmë $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ dhe thjeshtojmë me Δx.

Hapi 4. Gjejmë limitin kur $\Delta x \to 0$.

Shembull 1. $f(x) = x^2$.

$$\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 2x.$$

$(x^2)' = 2x$ për çdo $x \in \mathbb{R}$.

Shembull 2. $f(x) = c$ (konstante): $\Delta y = 0$, pra $(c)' = 0$.

Ushtrim i zgjidhur: rrënja katrore

Hoxha–Stringa, Ushtrime, kreu për derivatin

Detyra. Me përkufizim, gjeni derivatin e $f(x) = \sqrt{x}$ për $x > 0$.

Hapi 1–2. $\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$.

Hapi 3. Shumëzojmë numëruesin dhe emëruesin me të konjuguarin $\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x \left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}.$$

Hapi 4. Nga vazhdueshmëria e rrënjës:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0.$$

Në $x = 0$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} \xrightarrow[\Delta x \to 0^+]{} +\infty.$$

Derivati **nuk ekziston**: tangjentja në $(0, 0)$ është vertikale.

Pyetje për ju

Pyetja 1. Me përkufizim, gjeni derivatin e $f(x) = \dfrac{1}{x}$ në një pikë $x \neq 0$.

Pyetja 2. Një objekt lëviz sipas ligjit $s(t) = t^3$ (metra, sekonda). Sa është shpejtësia mesatare në $[2;\ 2{,}1]$? Po shpejtësia e çastit në $t = 2$?

Mendojeni 3–4 minuta, pastaj shohim zgjidhjen.

Zgjidhje

Pyetja 1.

$$\Delta y = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{x(x+\Delta x)} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} -\frac{1}{x^2}.$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0.$$

Pyetja 2.

$$v_{\text{mes}} = \frac{2{,}1^3 - 2^3}{0{,}1} = \frac{9{,}261 - 8}{0{,}1} = 12{,}61 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Me përkufizim, $(t^3)' = 3t^2$, prandaj

$$v(2) = 3 \cdot 2^2 = 12 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Shpejtësia mesatare në një interval të vogël është *përafrim* i shpejtësisë së çastit: $12{,}61 \approx 12$.

Derivatet e njëanshme

Përkufizimi 1.2. **Derivati i majtë** dhe **derivati i djathtë** i f në a janë limitet **e fundme** (kur ekzistojnë)

$$f'_-(a) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}, \qquad f'_+(a) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$

Teorema 1.3. Në një pikë të brendshme a, funksioni f është i derivueshëm atëherë dhe vetëm atëherë kur $f'_-(a)$ dhe $f'_+(a)$ ekzistojnë, janë **të fundme** dhe të barabarta.

Kështu studiojmë derivueshmërinë në pikat ku formula e funksionit ndryshon (funksione «me copa»).

Shembull. $f(x) = |x|$ në $a = 0$:

$$\frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} -1, & \Delta x < 0, \\ 1, & \Delta x > 0. \end{cases}$$

$f'_-(0) = -1 \neq 1 = f'_+(0)$: $|x|$ **nuk** është e derivueshme në 0. Grafiku ka një «kënd» (pikë këndore).

Derivueshmëria në një interval

Përkufizimi 1.4. Funksioni f është **i derivueshëm në intervalin e hapur** (a, b) nëse derivati ekziston në çdo pikë të tij.

Në intervalin e mbyllur $[a, b]$, sipas konventës që përdorim këtu, kërkohen edhe derivatet e fundme të njëanshme në skaje: $f'_+(a)$ dhe $f'_-(b)$.

Shembull. $f(x) = \sqrt{x}$. Në 0, raporti i djathtë është

$$\frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \xrightarrow[h \to 0^+]{} +\infty.$$

f është e derivueshme në $(0, +\infty)$, por **jo** në $[0, +\infty)$.

Nuk ekziston derivat i djathtë i fundëm; grafiku ka në 0 **tangjente vertikale nga e djathta**. Derivati «i pafundëm» nuk është derivat.

Tangjentja dhe normalja

$f'(a)$ është **koeficienti këndor i tangjentes** ndaj grafikut në pikën $M_0\big(a, f(a)\big)$: $f'(a) = \operatorname{tg}\alpha$.

Ekuacioni i tangjentes:

$$y - f(a) = f'(a)\,(x - a).$$

Ekuacioni i normales (kur $f'(a) \neq 0$):

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}\,(x - a).$$

Raste të veçanta.

- $f'(a) = 0$: tangjentja horizontale $y = f(a)$, normalja vertikale $x = a$.
- f e vazhdueshme dhe $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to \pm\infty$: tangjentja vertikale $x = a$, normalja $y = f(a)$ (p.sh. $\sqrt[3]{x}$ në 0); derivati i fundëm nuk ekziston.

Normalja $\perp$ tangjentes: kur të dy koeficientët këndorë ekzistojnë, prodhimi i tyre është -1.

Ushtrim i zgjidhur: tangjentja dhe normalja

Detyra. Shkruani ekuacionet e tangjentes dhe të normales ndaj $y = x^2 - 2x + 3$ në pikën me abshisë $a = 2$.

Hapi 1. $f(2) = 4 - 4 + 3 = 3$, pra $M_0(2, 3)$.

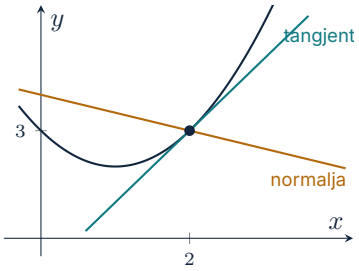
Hapi 2. $f'(x) = 2x - 2$, pra $f'(2) = 2$.

Hapi 3. Tangjentja: $y - 3 = 2(x - 2)$,

$$y = 2x - 1.$$

Hapi 4. Normalja: $y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 2)$,

$$y = -\frac{1}{2}\,x + 4.$$



Derivueshmëria sjell vazhdueshmëri

Teorema 3.1. Nëse f është e derivueshme në pikën a, atëherë f është e vazhdueshme në a.

Vërtetim. Për $\Delta x \neq 0$ shkruajmë

$$\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x.$$

Kalojmë në limit kur $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = f'(a) \cdot 0 = 0.$$

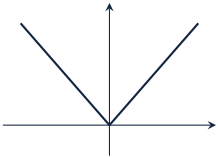
Kjo është pikërisht vazhdueshmëria në a (formulimi me shtesa nga leksioni i kaluar). ■

E anasjellta nuk vlen! Funksioni $|x|$ është i vazhdueshëm në 0, por nuk është i derivueshëm atje.

Në formë logjike: derivueshmëri $\Rightarrow$ vazhdueshmëri, dhe jo-vazhdueshmëri $\Rightarrow$ jo-derivueshmëri.

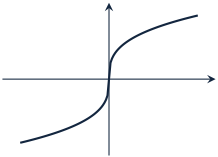
Tri mënyra si «dështon» derivati

Pikë këndore



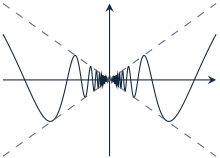
$|x|$ në 0: derivatet e njëanshme -1 dhe 1 janë të ndryshme.

Tangjente vertikale



$\sqrt[3]{x}$ në 0: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} \to +\infty.$

Lëkundje



$x \sin \dfrac{1}{x}$ (me $f(0) = 0$): $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \sin \dfrac{1}{\Delta x}$ nuk ka limit.

Në të tri rastet funksioni është **i vazhdueshëm** në 0, por **jo i derivueshëm**.

Derivueshmëria dhe klasa C^1

Përkufizimi 3.2. $f \in C^1(I)$ nëse f është e derivueshme në I dhe funksioni derivat f' është **i vazhdueshëm** në I.

Shembull. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Në 0: $\dfrac{f(h) - f(0)}{h} = h \sin \dfrac{1}{h} \to 0$, pra $f'(0) = 0$.

Për $x \neq 0$: $f'(x) = 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}$.

Për $x_n = \dfrac{1}{2\pi n}$: $f'(x_n) = -1$; për $z_n = \dfrac{1}{(2n+1)\pi}$: $f'(z_n) = 1$. Të dy vargjet shkojnë te 0, pra f' **nuk ka limit** në 0 (kriteri i Hajnes).

f është e derivueshme në çdo pikë, por f' ka këputje në 0: $f \notin C^1(\mathbb{R})$.

$f'(0)$ llogaritet me përkufizim, jo si limit i formulës së $f'(x)$.

Pyetje për ju

Pyetja 3. Për cilat vlera të a dhe b funksioni

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 1, \\ ax + b, & x > 1 \end{cases}$$

është i derivueshëm në $x = 1$?

Udhëzim: kërkoni dy kushte — njëri vjen nga vazhdueshmëria, tjetri nga derivatet e njëanshme.

Zgjidhje

Kushti 1: vazhdueshmëria (e domosdoshme nga Teorema 3.1):

$$\lim_{x\to 1^+}(ax+b) = a+b = f(1) = 1.$$

Kushti 2: derivatet e njëanshme.

$$f'_-(1) = \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{(1+\Delta x)^2-1}{\Delta x} = 2,$$

$$f'_+(1) = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{a(1+\Delta x)+b-1}{\Delta x} = a$$

(duke përdorur $a+b=1$).

Nga $a=2$ dhe $a+b=1$: $\quad a=2,\ b=-1$.

Atëherë $f(x)=2x-1$ për $x>1$: kjo është pikërisht tangjentja ndaj $y=x^2$ në $(1,1)$.

Pa kushtin 1, për $a=2$ dhe $b\neq -1$ funksioni ka kërcim në 1, ndaj nuk mund të jetë i derivueshëm.

Derivati i shumës, prodhimit dhe herësit

Le të jenë u dhe v të derivueshme në x dhe c konstante.

Teorema 4.1.

$$\begin{aligned}(c\,u)' &= c\,u',\\ (u \pm v)' &= u' \pm v',\\ (u\,v)' &= u'\,v + u\,v',\\ \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}, \quad v(x) \neq 0.\end{aligned}$$

Vërtetim për prodhimin. Shtojmë e heqim $u(x)\,v(x+\Delta x)$:

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}\,v(x+\Delta x) + u(x)\,\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Meqë v është e vazhdueshme (Teorema 3.1), $v(x+\Delta x) \to v(x)$, dhe marrim $u'v + uv'$. ∎

$(uv)' \neq u'\,v'$. Shembull: $(x \cdot x)' = 2x$, por $x' \cdot x' = 1$.

Vërtetimet e rregullave të tjera

Linearitet. Rrjedh nga linearitet i limitit:

$$\frac{\Delta(cu \pm v)}{\Delta x} = c\,\frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x} \to c\,u' \pm v'.$$

Derivati i $\frac{1}{v}$ (me $v(x) \neq 0$; nga vazhdueshmëria, $v \neq 0$ edhe pranë x):

$$\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{1}{v(x+\Delta x)} - \frac{1}{v(x)}\right) = -\frac{\Delta v}{\Delta x}\cdot\frac{1}{v(x+\Delta x)\,v(x)} \to -\frac{v'}{v^2}.$$

Herësi. Shkruajmë $\frac{u}{v} = u \cdot \frac{1}{v}$ dhe përdorim rregullin e prodhimit:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'}{v} + u\left(-\frac{v'}{v^2}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Kështu të gjitha rregullat e veprimeve rrjedhin nga përkufizimi dhe nga Teorema 3.1.

Derivati i funksionit të përbërë

Teorema 4.2 (rregulli i zinxhirit). Nëse $u = g(x)$ është e derivueshme në x dhe $y = f(u)$ është e derivueshme në $u = g(x)$, atëherë $y = f\big(g(x)\big)$ është e derivueshme në x dhe

$$\big(f(g(x))\big)' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x), \qquad \text{ose} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Vërtetim. Meqë f është e derivueshme në u:

$$\Delta y = \big[f'(u) + \varepsilon(\Delta u)\big]\Delta u,$$

ku $\varepsilon(t) \to 0$ kur $t \to 0$ dhe $\varepsilon(0) = 0$; kështu barazimi vlen **edhe për** $\Delta u = 0$. Pjesëtojmë me $\Delta x \neq 0$: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \big[f'(u) + \varepsilon(\Delta u)\big]\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$. Kur $\Delta x \to 0$: $\Delta u \to 0$ dhe $\dfrac{\Delta u}{\Delta x} \to g'(x)$. ■

Shembull. $y = \sin(x^2)$: $u = x^2$,

$$y' = \cos(x^2) \cdot 2x.$$

Shembull. $y = \sqrt{1 + x^2}$:

$$y' = \frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Derivati i funksionit të anasjelltë

Teorema 4.3. Le të jetë f e vazhdueshme dhe rreptësisht monotone në një interval, x_0 pikë e brendshme e tij dhe f e derivueshme në x_0 me $f'(x_0) \neq 0$. Atëherë $g = f^{-1}$ është e derivueshme në $y_0 = f(x_0)$ dhe $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Vërtetim. Për $y \neq y_0$ vendosim $x = g(y)$; atëherë $x \neq x_0$ (monotonia). Nga vazhdueshmëria e funksionit të anasjelltë, $x \to x_0$ kur $y \to y_0$:

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \to \frac{1}{f'(x_0)}. \qquad \blacksquare$$

Zbatim. $y = \arcsin x \iff x = \sin y$, $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad |x| < 1,$$

sepse $\cos y > 0$ në këtë interval.

Tabela e derivateve dhe kushtet

$f(x)$	$f'(x)$	ku vlen
x^{α}	$\alpha\, x^{\alpha-1}$	$x > 0$ *
a^{x}	$a^{x} \ln a$	$\mathbb{R};\ a > 0,\ a \neq 1$
e^{x}	e^{x}	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$x > 0$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	$x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$

$f(x)$	$f'(x)$	ku vlen
$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\cos x \neq 0$
$\operatorname{cotg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\sin x \neq 0$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert < 1$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert < 1$
$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{arccotg} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

* për α real arbitrar; për α të plotë, bashkësia e përcaktimit trajtohet veçmas.

Nga vijnë formulat? Dy shembuj

$(\sin x)' = \cos x$. Me formulën e diferencës:

$$\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \frac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Limiti i parë është 1 (limiti i shquar), i dyti $\cos x$ (vazhdueshmëria).

$(e^x)' = e^x$.

$$\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x} = e^x\cdot\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x},$$

ku $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=1$ (limit i shquar).

Kjo veti e bën e^x funksionin «natyror» të analizës: është i vetmi (me $f(0)=1$) që është derivat i vetvetes.

Ushtrim i zgjidhur: rregullat së bashku

Hoxha–Stringa, Ushtrime, kreu për derivatin

Detyra. Gjeni derivatin e $y = \dfrac{x^2\, e^x}{1+\cos x}$. Bashkësia e përcaktimit: $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi : \ k \in \mathbb{Z}\}$.

Hapi 1. Herës: $u = x^2 e^x$, $v = 1 + \cos x$.

Hapi 2. Prodhim te numëruesi:

$$u' = 2x\, e^x + x^2 e^x = x\, e^x (x+2).$$

Hapi 3. $v' = -\sin x$.

Hapi 4. Formula e herësit:

$$y' = \frac{x\, e^x (x+2)(1+\cos x) + x^2 e^x \sin x}{(1+\cos x)^2}.$$

Faktorizojmë:

$$y' = \frac{x\, e^x \big[(x+2)(1+\cos x) + x \sin x\big]}{(1+\cos x)^2}.$$

Derivimi logaritmik

Për funksione të trajtës $y = u(x)^{v(x)}$, ose me shumë faktorë, logaritmojmë përpara se të derivojmë.

Detyra. Gjeni y' për $y = x^x$, $x > 0$.

Hapi 1. $\ln y = x \ln x$.

Hapi 2. Derivojmë të dyja anët (rregulli i zinxhirit në të majtë):

$$\frac{y'}{y} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

Hapi 3. $y' = x^x(\ln x + 1)$.

Gabim i shpeshtë: $(x^x)' = x \cdot x^{x-1}$ ose $(x^x)' = x^x \ln x$. Të dyja janë të gabuara: ndryshojnë *edhe baza edhe eksponenti*.

Formula e përgjithshme. Për u, v të derivueshme dhe $u > 0$:

$$(u^v)' = u^v \left(v' \ln u + \frac{v\,u'}{u} \right).$$

Për $y \neq 0$: $\left(\ln |y|\right)' = \dfrac{y'}{y}$; kjo nuk e zgjeron bashkësinë e përcaktimit të y.

Derivimi i funksioneve të dhëna në mënyrë implicite

Funksioni $y = y(x)$ jepet nga një ekuacion $F\big(x, y(x)\big) = 0$. Derivojmë të dyja anët sipas x, duke e parë y si funksion të x.

Shembull. Rrethi $x^2 + y^2 = 25$. Në një degë të derivueshme me $y \neq 0$:

$$2x + 2y\,y' = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = -\frac{x}{y}.$$

Në pikën $(3, 4)$: $y' = -\dfrac{3}{4}$; tangjentja $y - 4 = -\dfrac{3}{4}(x - 3)$.

Në $(5, 0)$ formula nuk zbatohet: rrethi ka atje tangjente vertikale $x = 5$.

Rasti i përgjithshëm. Nëse F është e klasës C^1 pranë (a, b), $F(a, b) = 0$ dhe $F_y(a, b) \neq 0$, teorema e funksionit implicit garanton një degë lokale të derivueshme $y = y(x)$, dhe

$$F_x + F_y\,y' = 0 \Longrightarrow y' = -\frac{F_x}{F_y} \quad (F_y \neq 0).$$

Teorema e përgjithshme dhe derivatet e pjesshme trajtohen në Analizë Matematike II.

Pyetje për ju

Gjeni derivatet:

1. $y = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right),\ x \neq 0$;
2. $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$;
3. $y = (\sin x)^x,\ 0 < x < \pi$.

Te 1. krahasoni rezultatin me derivatin e $\operatorname{arctg} x$. Çfarë vini re?

Zgjidhje

1. $y' = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{1}{x^2+1}.$

Derivati është i kundërt me atë të $\operatorname{arctg} x$: shuma $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$ ka derivat 0, pra është konstante në $(0,+\infty)$ (vlera $\dfrac{\pi}{2}$) dhe në $(-\infty,0)$ (vlera $-\dfrac{\pi}{2}$).

2.

$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

3. $\ln y = x \ln(\sin x)$, prandaj

$$\frac{y'}{y} = \ln(\sin x) + x \cdot \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$y' = (\sin x)^x \big(\ln(\sin x) + x \operatorname{cotg} x\big).$$

Te 2. thjeshtimi «i bukur» nuk është rastësi: ky funksion është i anasjellti i $\operatorname{sh} x$ (sinusi hiperbolik).

Diferenciali i funksionit

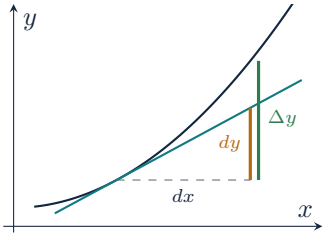
f është e derivueshme në x **atëherë dhe vetëm atëherë** kur

$$\Delta y = f'(x)\,h + r(h), \qquad \frac{r(h)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Përkufizimi 5.1. **Diferenciali** i f në x është aplikimi linear $h \mapsto f'(x)\,h$. Shënojmë $dx = h$ dhe

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Për $dx \neq 0$: $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$. Kur $dx = 0$, diferenciali është 0, por herësi nuk përcaktohet.



dy: ndryshimi i ordinatës *së tangjentes*; Δy: ndryshimi i ordinatës së grafikut.

Llogaritje të përafërta me diferencial

Për Δx të vogël: $\Delta y \approx dy$, pra

$$f(a+\Delta x) \approx f(a) + f'(a)\,\Delta x.$$

Linearizimi: pranë a funksioni zëvendësohet me tangjenten; gabimi është $o(\Delta x)$.

Detyra. Llogaritni përafërsisht $\sqrt{4{,}02}$.

$f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$, $\Delta x = 0{,}02$,

$f'(4) = \dfrac{1}{2\sqrt{4}} = \dfrac{1}{4}$.

$$\sqrt{4{,}02} \approx 2 + \frac{1}{4}\cdot 0{,}02 = 2{,}005.$$

Vlera numerike: $2{,}0049937656\ldots$; gabimi absolut $\approx 6{,}23 \cdot 10^{-6}$.

Në informatikë. Metoda e Njutonit për rrënjët e $f(x)=0$ përdor pikërisht linearizimin:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad f'(x_n) \neq 0.$$

Bibliotekat numerike përdorin edhe përafrime polinomiale, racionale etj.

Derivatet e rendeve të larta

Përkufizimi 6.1. Derivati i derivatit quhet **derivat i rendit të dytë**: $f''(x) = \big(f'(x)\big)'$. Në përgjithësi

$$f^{(n)}(x) = \Big(f^{(n-1)}(x)\Big)', \qquad n \geq 2.$$

Formula që duhen ditur:

$$(e^x)^{(n)} = e^x,$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n\, n!}{x^{n+1}}.$$

Kuptimi fizik. Nëse $s(t)$ është rruga, atëherë $s'(t) = v(t)$ është shpejtësia dhe $s''(t) = a(t)$ **nxitimi**.

Te rënia e lirë: $s = \dfrac{gt^2}{2}$, $s' = gt$, $s'' = g$.

Pyetje për ju

Pyetja 4. Për $f(x) = \ln(1+x)$, gjeni $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ dhe hamendësoni formulën për $f^{(n)}(x)$.

Pyetja 5. Vërtetoni me induksion matematik formulën $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

Zgjidhje

Pyetja 4.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2},$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \qquad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}.$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad n \geq 1.$$

(Vërtetohet me induksion, si në Pyetjen 5.)

Pyetja 5. Për $n = 1$:

$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. ✓

Nëse formula vlen për n, atëherë

$$\begin{aligned}(\sin x)^{(n+1)} &= \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \\ &= \sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right),\end{aligned}$$

sepse $\cos\theta = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$. ■

Derivati numerik: zgjedhja e hapit

Diferenca përpara për $f(x) = e^x$ në $a = 1$ (vlera e saktë e):

$$D(h) = \frac{e^{1+h} - e}{h}.$$

h	$D(h)$	gabimi absolut
10^{-2}	2,7319186558	$1{,}364 \cdot 10^{-2}$
10^{-5}	2,7182954200	$1{,}359 \cdot 10^{-5}$
10^{-8}	2,7182818219	$6{,}603 \cdot 10^{-9}$
10^{-12}	2,7187141427	$4{,}323 \cdot 10^{-4}$
10^{-16}	0	2,718

Rezultate nga Python, precizion i dyfishtë.

Dy gabime në garë.

- **Gabimi i prerjes**: $O(h)$, për $f \in C^2$ pranë pikës.
- **Gabimi i rrumbullakimit** (modeli standard): $O\left(\frac{\varepsilon}{|h|}\right)$, me $\varepsilon \approx 2{,}2 \cdot 10^{-16}$.

Hapi optimal varet nga funksioni dhe nga aritmetika.

Për $h = 10^{-16}$: $1 + h$ ruhet si 1, njësoj si te kuizi i limitit.

Zbritja sipas gradientit (gradient descent)

Ideja. Kërkojmë minimumin e një funksioni «gabimi» $L(w)$. Nëse $L'(w) \neq 0$, drejtimi $-L'(w)$ është **drejtim lokal zbritjeje**: për hap pozitiv mjaft të vogël, L zvogëlohet.

$$w_{n+1} = w_n - \eta\, L'(w_n), \qquad \eta > 0.$$

Një hap η arbitrar nuk garanton ulje të funksionit.

Shembull. $L(w) = (w-3)^2$, $L'(w) = 2(w-3)$, $\eta = 0{,}25$, $w_0 = 0$:

$$w_{n+1} = w_n - \frac{1}{2}(w_n - 3).$$

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4
0	1,5	2,25	2,625	2,8125

Konvergjenca provohet në slajdin pasues; për funksione të përgjithshme nuk garantohet minimum global.

Kur konvergjon zbritja sipas gradientit?

Për $L(w) = (w-3)^2$ dhe hap $\eta > 0$:

$$w_{n+1} - 3 = (w_n - 3) - 2\eta\,(w_n - 3) = (1-2\eta)\,(w_n - 3) \quad \Longrightarrow \quad w_n - 3 = (1-2\eta)^n\,(w_0 - 3).$$

Nëse $w_0 = 3$, vargu mbetet konstant. Për $w_0 \neq 3$: $w_n \to 3$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $|1-2\eta| < 1$, pra $0 < \eta < 1$.

Kjo është progresioni gjeometrik me herës $q = 1 - 2\eta$ nga leksioni i vargjeve.

$0 < \eta < \frac{1}{2}$	afrim monoton
$\eta = \frac{1}{2}$	minimumi në një hap
$\frac{1}{2} < \eta < 1$	afrim me lëkundje
$\eta = 1$	cikël: $w_0,\ 6 - w_0,\ w_0,\ \ldots$
$\eta > 1$	$\lvert w_n - 3\rvert \to \infty$

Laborator 4. Nisni nga $w_0 = 0$ dhe provoni $\eta = 0{,}25;\ 0{,}5;\ 0{,}75;\ 1;\ 1{,}1$. Llogaritni gjashtë iteracione dhe krahasoni vlerat $L(w_n)$.

PËRMBLEDHJE

Në një shikim

Përkufizimi:
$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$.

Gjeometria: $f'(a)$ = koeficienti këndor i tangjentes; $y - f(a) = f'(a)(x-a)$.

Lidhja: derivueshmëri $\Rightarrow$ vazhdueshmëri, por jo anasjelltas ($|x|$).

Rregullat: $(uv)' = u'v + uv'$,
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$,
$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))\,g'(x)$.

Diferenciali: $dy = f'(x)\,dx$;
$f(a+\Delta x) \approx f(a) + f'(a)\Delta x$.

Rendet e larta: $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

Leksioni i ardhshëm: teoremat themelore të njehsimit diferencial (Ferma, Rol, Lagranzh) dhe rregulli i Lopitalit.

PËRMBLEDHJE

Ushtrime për punë të pavarur

Ushtrime të ngjashme: Hoxha–Stringa, Ushtrime të Analizës Matematike 1, kreu për derivatin.

1. Me përkufizim, gjeni derivatin e $f(x) = x^3 - 2x$ dhe të $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
2. A është $f(x) = |x^2 - 1|$ e derivueshme në $x = 1$? Arsyetoni me derivatet e njëanshme.
3. Shkruani ekuacionin e tangjentes ndaj $y = \ln x$ që kalon nga origjina.
4. Derivoni: $y = \dfrac{\sin x}{1 + \operatorname{tg} x}$, $y = e^{-x^2}\cos 3x$.
5. Derivoni: $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$, $y = x^{\sin x}$ $(x > 0)$.
6. Llogaritni përafërsisht me diferencial: $\sqrt[3]{8{,}06}$ dhe $\sin 31^\circ$.
7. Gjeni $f^{(n)}(x)$ për $f(x) = x\,e^x$.
8. **Python.** Llogaritni $\dfrac{\sin(1+h) - \sin 1}{h}$ për $h = 10^{-1}, \dots, 10^{-16}$ dhe gjeni h me gabimin më të vogël.

LABORATOR

Laborator 1: nga prerësja te tangjentja

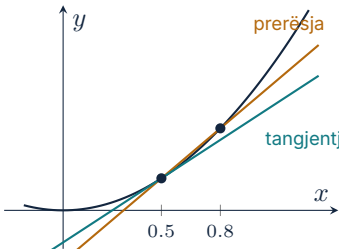
$f(x) = x^2$, $a = 0{,}5$. Koeficienti këndor i prerëses:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(0{,}5+h)^2 - 0{,}25}{h} = 1 + h;$$

i tangjentes: $f'(0{,}5) = 1$.

Eksperiment. $h = 0{,}3;\ 0{,}1;\ -0{,}1;\ -0{,}01$. Regjistroni koeficientët dhe vizatoni prerëset.

Rezultatet: $1{,}3;\ 1{,}1;\ 0{,}9;\ 0{,}99$. Shpjegoni afrimin nga të dyja anët.



> Përsëriteni për $a = 1$ dhe nxirrni formulën e përgjithshme $2a + h$.

Laborator 2: diferenciali kundrejt shtesës

$f(x) = x^2$, $a = 1$: $\Delta y = (1+h)^2 - 1 = 2h + h^2$, $dy = f'(1)\,h = 2h$, $\Delta y - dy = h^2$.

h	Δy	dy	$\Delta y - dy$
$0{,}1$	$0{,}21$	$0{,}2$	$0{,}01$
$0{,}01$	$0{,}0201$	$0{,}02$	$0{,}0001$
$-0{,}1$	$-0{,}19$	$-0{,}2$	$0{,}01$

Vëzhgim. Kur $|h|$ zvogëlohet 10 herë, gabimi h^2 zvogëlohet 100 herë: $\dfrac{\Delta y - dy}{h} = h \to 0$.

Eksperiment shtesë. Në $a = 0$: $dy = 0$ dhe $\Delta y = h^2$. Shpjegoni pse gabimi *relativ* ndaj dy nuk përcaktohet.

Laborator 3: derivati numerik në Python

```
import math
for k in range(1, 17):
    h = 10.0**(-k)
    d = (math.exp(1+h) - math.exp(1))/h
    c = (math.exp(1+h) - math.exp(1-h))/(2*h)
    print(k, abs(d - math.e), abs(c - math.e))
```

Detyrë. Krahasoni me **diferencën qendrore**

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h},$$

e cila ka gabim prerjeje $O(h^2)$ për $f \in C^3$ pranë a. Krahasoni dy kolonat e gabimeve dhe gjeni minimumin e secilës.

Referenca dhe përdorimi

- E. Hoxha, A. Stringa, *Analiza Matematike 1*, kreu për derivatin.
- E. Hoxha, A. Stringa, *Ushtrime të Analizës Matematike 1*, kreu për derivatin.

> Materiali është plotësues i tekstit bazë për leksion, seminar dhe laborator.

Faleminderit!

Pyetje dhe diskutim

Prof. As. Dr. Siditë Duraj

Departamenti i Matematikës, FSHN · Universiteti i Shkodrës «Luigj Gurakuqi»