ANALIZË MATEMATIKE I · BACHELOR NË INFORMATIKË, VITI I

Funksionet

Koncepti, vetitë dhe funksionet elementare, me lidhje të drejtpërdrejtë me informatikën

$$f : A \to B, \qquad x \mapsto f(x)$$

relacion · injektivitet · bijeksion · monotoni · rritje e funksioneve

Prof. As. Dr. Siditë Duraj · Departamenti i Matematikës, FSHN · Universiteti i Shkodrës «Luigj Gurakuqi»

Pse funksionet janë gjuha bazë e informatikës

PROGRAMI = FUNKSION

Hyrje $\to$ dalje, me rregull të përcaktuar.

```
int f(int x)
```

është pikërisht shkrimi

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

Para trupit të funksionit deklarohen A dhe B.

KOMPLEKSITETI = KRAHASIM FUNKSIONESH

Një algoritëm kryen n^2 hapa, një tjetër $100\,n \log_2 n$.

Cili është më i shpejtë dhe nga cili n e tutje?

Përgjigjja kërkon të njohim rritjen e funksioneve elementare.

KODIMI = BIJEKSION

Kodimi, enkriptimi, kompresimi pa humbje: duhet gjithmonë të kthehemi pas, pra nevojitet

$$f^{-1} : B \to A$$

Funksioni hash, përkundrazi, nuk është injektiv.

IDEJA KYÇE Ky leksion ndërton gjuhën e saktë matematikore që do të përdorni në algoritme, programim dhe analizë.

Rezultatet e të nxënit

1. Të përkufizojë funksionin si relacion dhe të dallojë $D(f)$, bashkësinë e mbërritjes dhe $V(f)$.
2. Të llogarisë shëmbëllimin $f(S)$ dhe parashëmbëllimin $f^{-1}(T)$ të një bashkësie.
3. Të provojë injektivitetin, surjektivitetin, bijektivitetin dhe të gjejë funksionin e anasjelltë.
4. Të studiojë monotoninë, kufizueshmërinë, çiftësinë dhe periodicitetin drejtpërdrejt nga përkufizimi.
5. Të ndërtojë grafikët e funksioneve elementare me anë të shndërrimeve.
6. Të zbatojë konceptet në rritjen e algoritmeve, kodim dhe funksionet bazë të informatikës.

Struktura e leksionit

I **Koncepti i funksionit**
relacion, bashkësitë D, B, V, shëmbëllimi dhe parashëmbëllimi

II **Injektiviteti, surjektiviteti, bijektiviteti**
prova, funksioni i përbërë, funksioni i anasjelltë

III **Vetitë e funksioneve**
monotonia, kufizueshmëria, sup/inf, çiftësia, periodiciteti

IV **Funksionet elementare**
gjashtë familje, shndërrimet e grafikut, çiftet funksion – i anasjelltë

V **Ura drejt informatikës**
rritja e funksioneve, logaritmi binar, pjesa e plotë, mod, kodimi, sigmoidi

I

Koncepti i funksionit

Nga “rregull” te përkufizimi rigoroz: funksioni si relacion i veçantë

Përkufizimi rigoroz i funksionit

PËRKUFIZIM

Le të jenë A dhe B bashkësi jo boshe. **Funksion** nga A në B quhet çdo relacion $f \subseteq A \times B$ i tillë që

$$\forall x \in A \ \exists! \, y \in B : \ (x, y) \in f.$$

Elementi i vetëm y quhet **shëmbëllim** i x dhe shënohet $f(x)$; x quhet **parashëmbëllim** i y.

SHËNIMET

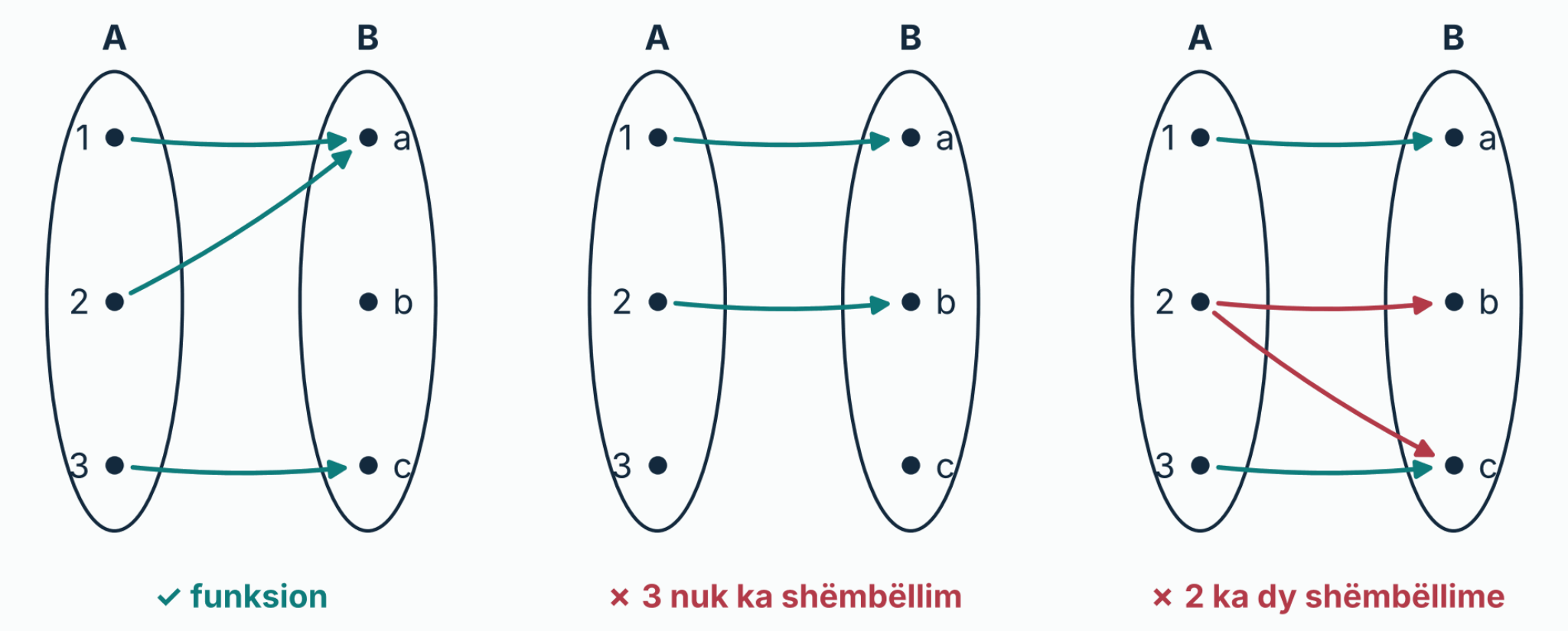
$$f : A \to B, \quad x \mapsto f(x)$$

- $A = D(f)$: bashkësia e përcaktimit
- B: bashkësia e mbërritjes
- $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in A\}$: grafiku

IDEJA KYÇE Funksioni $= (A, B, \text{rregulli})$. Nëse ndryshon A ose B, kemi **funksion tjetër**, edhe kur formula mbetet e njëjtë.

NË INFORMATIKË Nënshkrimi `double f(double x)` deklaron A dhe B para se të shkruhet rregulli, ashtu si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Kur kemi funksion? Diagramat me shigjeta



Dy kushte, të dyja të domosdoshme: **(1)** çdo $x \in A$ ka shëmbëllim (ekzistenca) · **(2)** ky shëmbëllim është i vetëm (njëvlershmëria).

Bashkësia e mbërritjes dhe bashkësia e vlerave

BASHKËSIA E MBËRRITJES B

Deklarohet në përkufizimin e funksionit.

Tregon se ku lejohen vlerat.

BASHKËSIA E VLERAVE $V(f)$

$$V(f) = f(A) = \{f(x) : x \in A\} \subseteq B$$

Llogaritet: vlerat që arrihen realisht.

SHEMBULL ME PROVË

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Këtu $B = \mathbb{R}$, por $V(f) = [0, +\infty)$. Provojmë me **dy përfshirje**:

- $V(f) \subseteq [0, +\infty)$, sepse $x^2 \geq 0$ për çdo $x \in \mathbb{R}$;
- $[0, +\infty) \subseteq V(f)$, sepse për çdo $y \geq 0$ kemi $f(\sqrt{y}) = y$.

KUJDES Mos e barazoni B me $V(f)$ pa provë. Gjetja e $V(f)$ kërkon dy përfshirje, jo vetëm një.

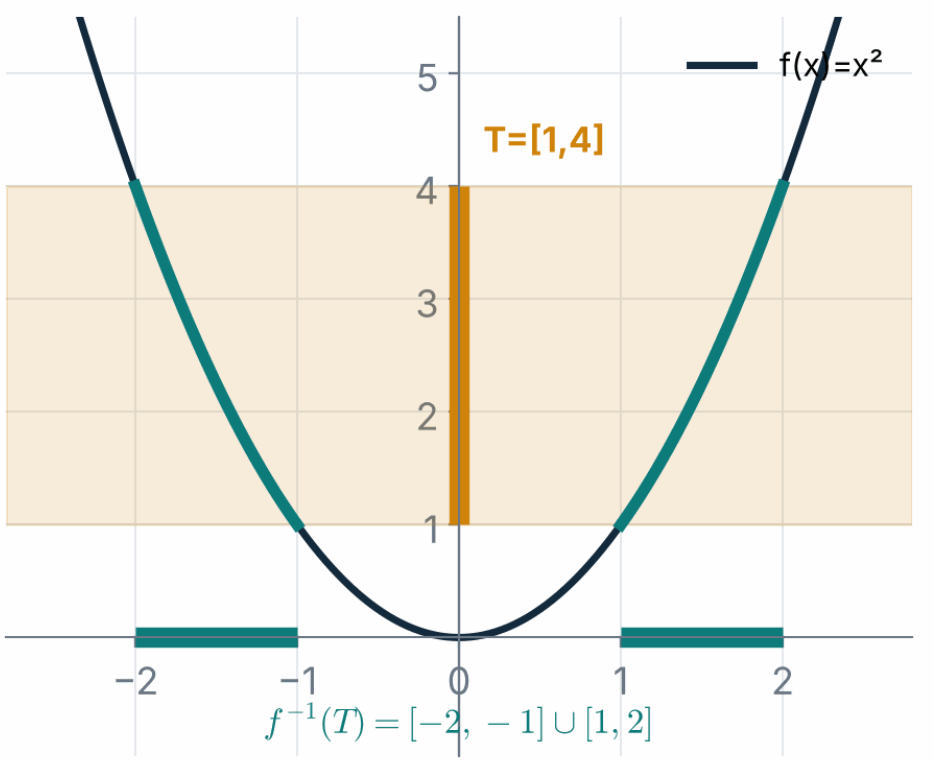
Shëmbëllimi dhe parashëmbëllimi i një bashkësie

PËRKUFIZIM ($f : A \to B$, $S \subseteq A$, $T \subseteq B$)

$$f(S) = \{f(x) : x \in S\}$$
$$f^{-1}(T) = \{x \in A : f(x) \in T\}$$

SHEMBUJ PËR $f(x) = x^2$

$$f([-1, 2]) = [0, 4]$$
$$f^{-1}([1, 4]) = [-2, -1] \cup [1, 2], \qquad f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset$$



KUJDES Parashëmbëllimi $f^{-1}(T)$ ekziston për **çdo** funksion. Funksioni i anasjelltë f^{-1} ekziston **vetëm** për funksionet bijektive. Shënimi është i njëjtë, koncepti jo.

Bashkësia natyrore e përcaktimit

Shprehja	Kushti
$P(x)$ (polinom)	asnjë kusht: $x \in \mathbb{R}$
$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$Q(x) \neq 0$
$\sqrt[2k]{g(x)}$ (indeks çift)	$g(x) \geq 0$
$\sqrt[2k+1]{g(x)}$ (indeks tek)	asnjë kusht shtesë
$\log_a g(x)$	$g(x) > 0$
$\operatorname{tg} g(x)$	$g(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\arcsin g(x)$, $\arccos g(x)$	$-1 \leq g(x) \leq 1$
$f(g(x))$	$x \in D(g)$ dhe $g(x) \in D(f)$

PARIMI

$D(f)$ është bashkësia më e madhe $A \subseteq \mathbb{R}$ ku formula ka kuptim.

Kur ka disa kushte, ato bashkohen me **prerje** ($\cap$).

NË INFORMATIKË

Funksion i pjesshëm:

`math.sqrt(-1)` $\rightarrow$ `ValueError`

`1/0` $\rightarrow$ `ZeroDivisionError`

Gjetja e $D(f)$ është validimi i hyrjes.

Shembull i zgjidhur: bashkësia e përcaktimit

GJENI $D(f)$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{\ln(2-x)}$$

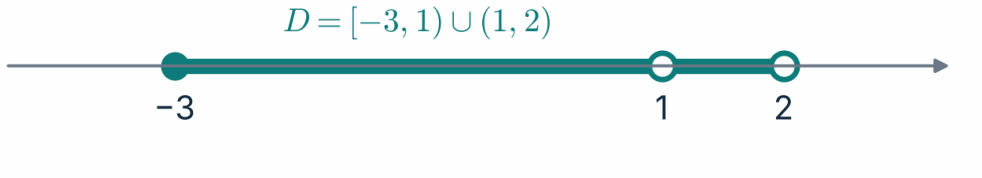
1. Rrënja: $x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$

2. Logaritmi: $2 - x > 0 \Rightarrow x < 2$

3. Emëruesi: $\ln(2-x) \neq 0 \Rightarrow 2 - x \neq 1 \Rightarrow x \neq 1$

4. Prerja e kushteve:

$$D(f) = [-3, 1) \cup (1, 2)$$



KUJDES Kushti 3 harrohet më shpesh: emëruesi është $\ln(2-x)$, jo $(2-x)$. Duhet që logaritmi të jetë $\neq 0$.

STRATEGJIA

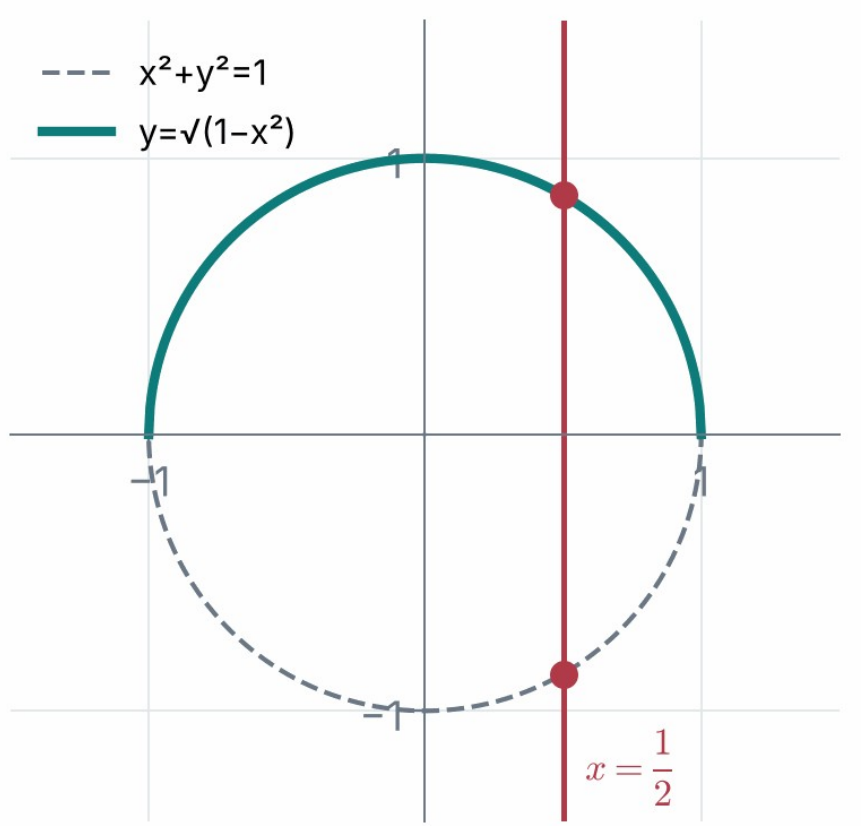
Shkruani **çdo** kusht veçmas (rrënjë, logaritëm, emërues, funksion i anasjelltë trigonometrik), pastaj gjeni prerjen në boshtin numerik.

Testi i drejtëzës vertikale

KRITERI

Bashkësia $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ është grafik i një funksioni $y = f(x)$ **atëherë dhe vetëm atëherë kur** çdo drejtëz vertikale $x = c$ e pret Γ në **më së shumti një** pikë.

- Rrethi $x^2 + y^2 = 1$: drejtëza $x = \dfrac{1}{2}$ e pret në dy pika, pra rrethi nuk është grafik funksioni.
- Gjysmërrethi $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$, është grafik funksioni.



KUJDES Testi **vertikal** kontrollon nëse kemi funksion. Testi **horizontal** kontrollon nëse funksioni është injektiv. Mos i ngatërroni.

II

Injektiviteti, surjektiviteti, bijektiviteti

Si provohen, si mohohen dhe pse funksioni i anasjelltë ekziston vetëm për bijeksionet

Tri vetitë themelore

INJEKTIV

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Elementë të ndryshëm kanë shëmbëllime të ndryshme.

Grafikisht: çdo drejtëz horizontale e pret grafikun në ≤ 1 pikë.

SURJEKTIV

$$\forall y \in B\, \exists x \in A : f(x) = y$$

Ekuivalent: $V(f) = B$.

Grafikisht: çdo drejtëz $y = c$, $c \in B$, e pret grafikun në ≥ 1 pikë.

BIJEKTIV

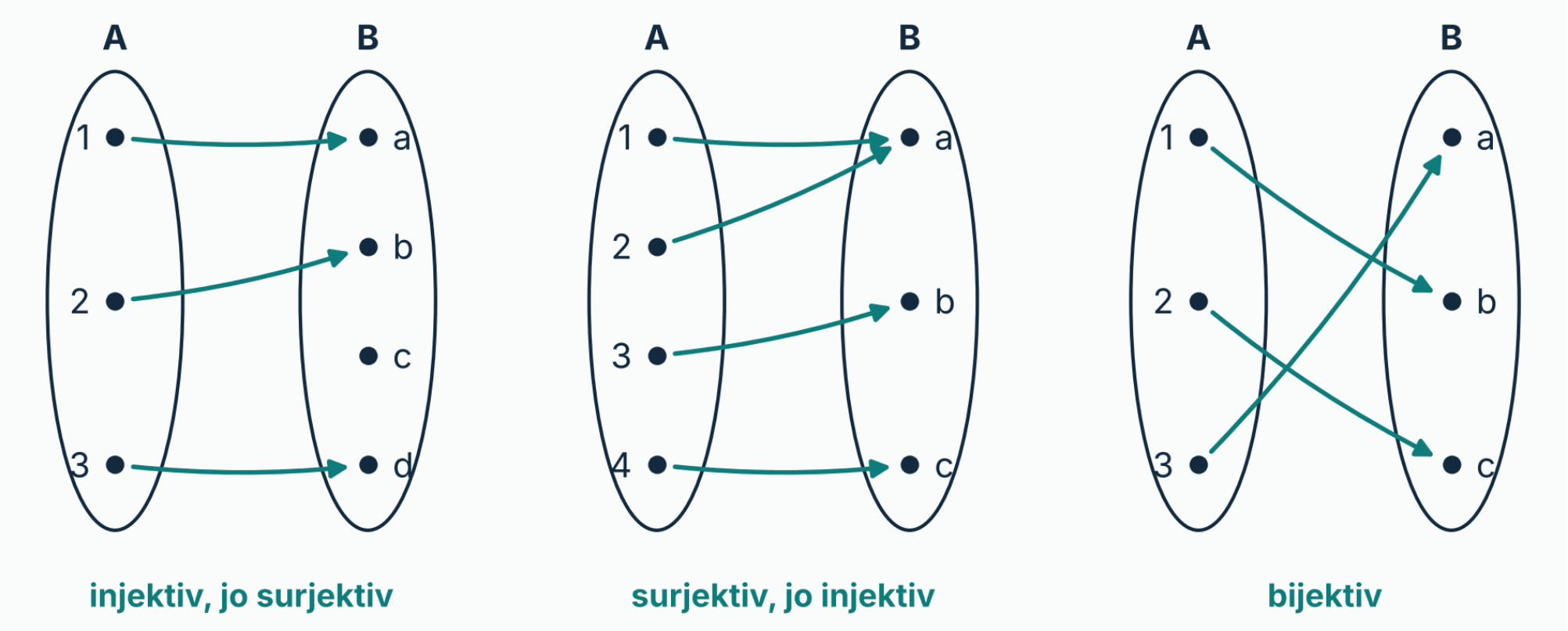
$$\forall y \in B\, \exists! \, x \in A : f(x) = y$$

Injektiv dhe surjektiv njëkohësisht.

Grafikisht: saktësisht 1 pikë prerjeje për çdo $c \in B$.

IDEJA KYÇE Injektiviteti varet nga bashkësia e përcaktimit A. Surjektiviteti varet nga bashkësia e mbërritjes B. Prandaj funksioni shkruhet gjithmonë i plotë: $f : A \to B$.

Tri vetitë në diagramë



Për A dhe B të fundme: f injektiv $\Rightarrow |A| \le |B|$, f surjektiv $\Rightarrow |A| \ge |B|$, f bijektiv $\Rightarrow |A| = |B|$.

Si provohet injektiviteti

SHEMBULL

$$f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}, \qquad f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$$

Supozojmë $f(x_1) = f(x_2)$ dhe nxjerrim $x_1 = x_2$:

$$\frac{2x_1+1}{x_1-3} = \frac{2x_2+1}{x_2-3}$$

$$\Rightarrow (2x_1+1)(x_2-3) = (2x_2+1)(x_1-3)$$

$$\Rightarrow 2x_1x_2 - 6x_1 + x_2 - 3 = 2x_1x_2 - 6x_2 + x_1 - 3$$

$$\Rightarrow 7x_2 = 7x_1 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2.$$

MOHIMI

Për të provuar që f **nuk** është injektiv mjafton **një** kundërshembull: $x_1 \neq x_2$ me $f(x_1) = f(x_2)$.

Shembull: $g(x) = x^2$,

$$g(-2) = g(2) = 4.$$

IDEJA KYÇE Vetia vlen “për çdo” çift $\Rightarrow$ duhet provë e përgjithshme. Mohimi është “ekziston” $\Rightarrow$ mjafton një shembull.

Surjektiviteti dhe funksioni i anasjelltë

VAZHDIM I SHEMBULLIT

Marrim $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ çfarëdo dhe zgjidhim $y = f(x)$ për x:

$$yx - 3y = 2x + 1 \;\Rightarrow\; x(y-2) = 3y + 1 \;\Rightarrow\; x = \frac{3y+1}{y-2}$$

Verifikim: $x \neq 3$, sepse $\dfrac{3y+1}{y-2} = 3 \Rightarrow 3y + 1 = 3y - 6$, e pamundur. Pra $x \in A$ dhe $f(x) = y$.

Përfundim: f është bijektiv dhe

$$f^{-1}(y) = \frac{3y+1}{y-2}.$$

PSE $2 \notin B$?

Ekuacioni

$$\frac{2x+1}{x-3} = 2$$

jep $2x + 1 = 2x - 6$, pa zgjidhje.

Pra $2 \notin V(f)$. Po ta linim $2 \in B$, f nuk do të ishte surjektiv.

IDEJA KYÇE Surjektiviteti provohet duke **ndërtuar** parashëmbëllimin. E njëjta llogaritje jep edhe formulën e f^{-1}.

I njëjti rregull, katër funksione të ndryshme

Funksioni $x \mapsto x^2$	Injektiv	Surjektiv	Bijektiv
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	jo	jo	jo
$f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$	jo	**po**	jo
$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$	**po**	jo	jo
$f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$	**po**	**po**	**po**, $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

PËRFUNDIMI

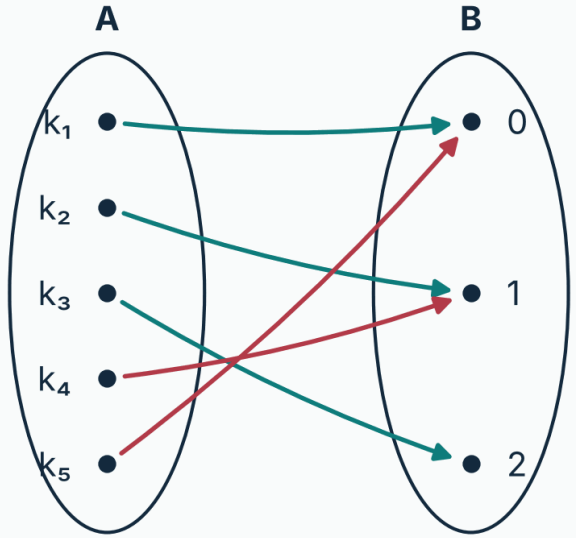
- Ngushtimi i **A** mund ta bëjë funksionin injektiv.
- Ngushtimi i **B** deri në $V(f)$ e bën funksionin surjektiv.
- Kështu ndërtohen $\sqrt{x}$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$: si funksione të anasjella të ngushtimeve bijektive.

Funksionet në bashkësi të fundme

NUMËRIMI ($|A| = m$, $|B| = n$)

- Të gjitha funksionet $A \to B$: n^m
- Injektive ($m \leq n$): $n(n-1)\cdots(n-m+1) = \dfrac{n!}{(n-m)!}$
- Bijektive ($m = n$): $n!$

Shembull: $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$: 9 funksione, 6 injektive, 0 bijektive.



5 çelësa → 3 qeliza: përplasje

TEOREMË **Parimi i Dirikleit (i foleve).** Nëse $m > n$, asnjë funksion $A \to B$ nuk është injektiv: dy elementë të paktën kanë të njëjtin shëmbëllim.

NË INFORMATIKË Funksioni hash SHA-256 ka 2^{256} vlera, por skedarët janë më shumë. Pra përplasjet ekzistojnë domosdoshmërisht.

Funksioni i përbërë (kompozimi)

PËRKUFIZIM

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$D(g \circ f) = \{x \in D(f) : f(x) \in D(g)\}$$

Lexohet "g pas f": fillimisht vepron f.

SHEMBULL: $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \ln x$

$$(g \circ f)(x) = \ln \sqrt{x}, \qquad D = (0, +\infty)$$

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{\ln x}, \qquad D = [1, +\infty)$$

VETITË

Në përgjithësi $g \circ f \neq f \circ g$ (nuk është ndërrimtar), por $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ (është shoqërues).

NË INFORMATIKË Thirrja e funksioneve në zinxhir: `y = g(f(x))`. Në përpunimin e të dhënave (pipeline): $x \to f \to g \to h$, që është $h \circ g \circ f$.

Teoremë: përbërja ruan injektivitetin dhe surjektivitetin

(a) f, g INJEKTIVE $\Rightarrow g \circ f$ INJEKTIV

Provë. $g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$, sepse g është injektiv $\Rightarrow x_1 = x_2$, sepse f është injektiv.

(b) f, g SURJEKTIVE $\Rightarrow g \circ f$ SURJEKTIV

Provë. Për $z \in C$ $\exists y \in B : g(y) = z$; për këtë y $\exists x \in A : f(x) = y$. Atëherë $(g \circ f)(x) = z$.

(c) E ANASJELLTA E PJESSHME

$g \circ f$ injektiv $\Rightarrow$ f injektiv; $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow$ g surjektiv. (Provë: ushtrim.)

KUJDES Nga $g \circ f$ injektiv **nuk** rrjedh që g është injektiv. Kundërshembull: $f : \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(0) = 1$ dhe $g(x) = x^2$. Funksioni $g \circ f$ është injektiv, por g jo.

Funksioni i anasjelltë

PËRKUFIZIM

Nëse $f : A \to B$ është bijektiv, atëherë $f^{-1} : B \to A$,

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

TEOREMË f ka funksion të anasjelltë **atëherë dhe vetëm atëherë kur** f është bijektiv.

VETITË

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A, \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$$

$$(f^{-1})^{-1} = f, \qquad (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Rendi përmbyset: vishen çorapet, pastaj këpucët; zhvishen në rend të kundërt.

ALGORITMI

1. Provo bijektivitetin. **2.** Zgjidh $y = f(x)$ për x. **3.** Shkruaj f^{-1} me bashkësitë e saj.

NË INFORMATIKË Dekodimi = funksioni i anasjelltë i kodimit.

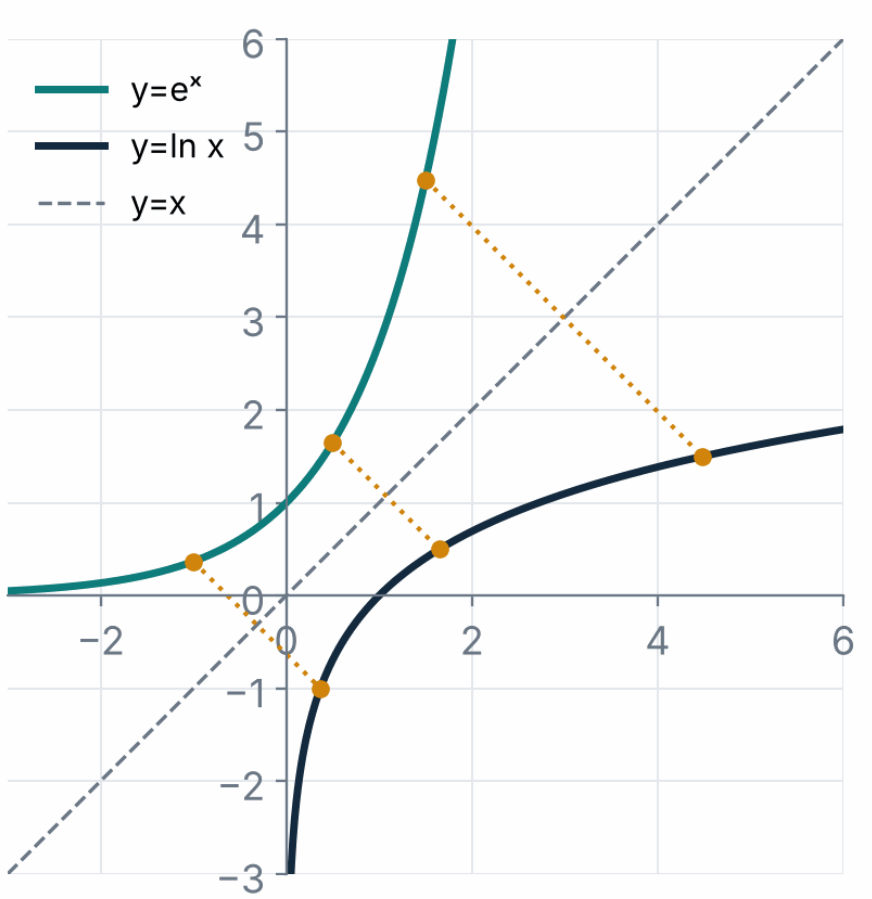
Grafiku i funksionit të anasjelltë

SIMETRIA NDAJ $y = x$

$$\Gamma(f^{-1}) = \{(y, x) : (x, y) \in \Gamma(f)\}$$

Grafiku i f^{-1} është pasqyrimi i grafikut të f ndaj drejtëzës $y = x$.

- f rreptësisht rritës $\Rightarrow$ f^{-1} rreptësisht rritës.



KUJDES $f^{-1}(x) \neq \dfrac{1}{f(x)}$.

Shembull: $\arcsin x \neq \dfrac{1}{\sin x}$.

Shënimi $\sin^{-1} x$ në kalkulatorë do të thotë $\arcsin x$.

III

Vetitë e funksioneve

Monotonia, kufizueshmëria, çiftësia, periodiciteti, të gjitha të provuara nga përkufizimi, pa derivat

Monotonia: përkufizimet

RRITËS (JO ZBRITËS)

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

RREPTËSISHT RRITËS

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

ZBRITËS (JO RRITËS)

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

RREPTËSISHT ZBRITËS

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Kushtet duhet të vlejnë **për çdo** $x_1, x_2 \in I \subseteq D(f)$. Funksioni konstant është njëkohësisht rritës dhe zbritës, por jo rreptësisht.

IDEJA KYÇE Monotonia është veti **globale** mbi I: krahasohen çdo dy pika të I, jo vetëm pikat fqinje.

Monotonia varet nga bashkësia

KUNDËRSHEMBULL

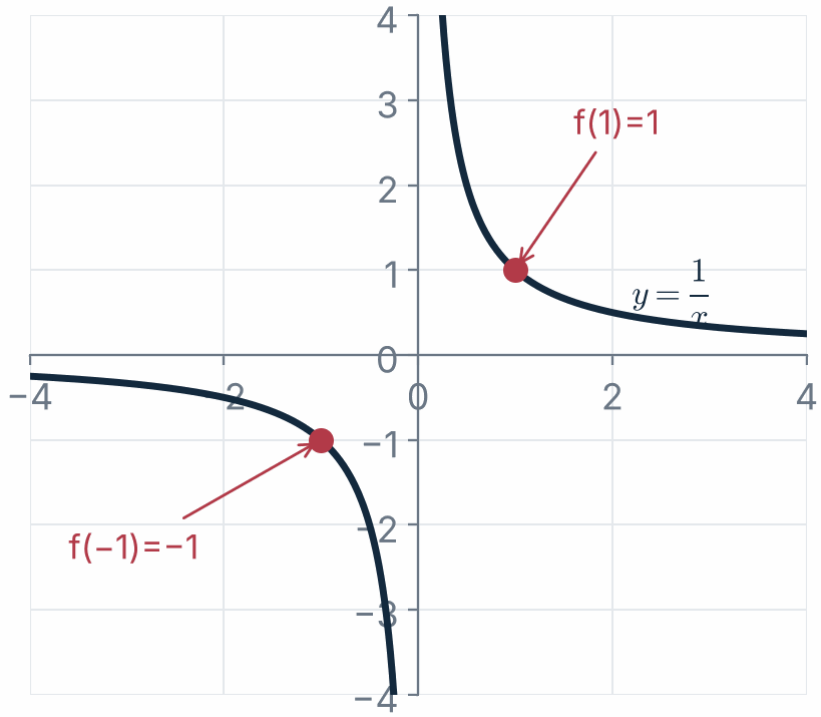
$f(x) = \dfrac{1}{x}$ është rreptësisht zbritës në $(-\infty, 0)$ dhe në $(0, +\infty)$, por **jo** në $\mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$-1 < 1, \quad \text{por} \quad f(-1) = -1 < 1 = f(1).$$

TEOREMË Nëse f është rreptësisht monoton në A, atëherë f është injektiv në A.

Provë. $x_1 \neq x_2$, p.sh. $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

KUJDES E anasjellta nuk vlen: $\dfrac{1}{x}$ është injektiv në $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, por nuk është monoton atje.



Provë e monotonisë pa derivat

$f(x) = x^3$ ËSHTË RREPTËSISHT RRITËS NË $\mathbb{R}$

Për $x_1 < x_2$:

$$x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2)$$

$$x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2 = \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3x_2^2}{4} > 0$$

(të dy katrorët nuk anulohen njëkohësisht, sepse $x_1 \neq x_2$). Pra $x_2^3 - x_1^3 > 0$.

$f(x) = \sqrt{x}$ ËSHTË RREPTËSISHT RRITËS NË $[0, +\infty)$

Për $0 \leq x_1 < x_2$:

$$\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} > 0,$$

sepse numëruesi dhe emëruesi janë pozitivë.

Teknikë: shumëzimi me të konjuguarin.

IDEJA KYÇE Metoda: shqyrtojmë shenjën e $f(x_2) - f(x_1)$ për $x_1 < x_2$. Derivati do të japë më vonë vetëm një kriter të mjaftueshëm.

Kufizueshmëria, supremumi dhe infimumi

PËRKUFIZIME (në $A \subseteq D(f)$)

- Kufizuar nga sipër: $\exists M\ \forall x : f(x) \le M$
- Kufizuar nga poshtë: $\exists m\ \forall x : f(x) \ge m$
- I kufizuar: $\exists K \ge 0\ \forall x : |f(x)| \le K$

KARAKTERIZIMI I SUPREMUMIT

$M = \sup f \iff$
(i) $f(x) \le M$ për çdo $x \in A$;
ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in A : f(x) > M - \varepsilon$.

TEOREMË **Aksioma e plotësisë.** Çdo bashkësi jo boshe e kufizuar nga sipër në $\mathbb{R}$ ka supremum në $\mathbb{R}$.

KUJDES max f ekziston **vetëm** kur supremumi arrihet: $\sup f \in V(f)$. Supremumi mund të ekzistojë pa maksimum.

Shembull: supremum pa maksimum

SHEMBULL

$$f(x) = \frac{x}{x+1}, \qquad x \in [0, +\infty)$$

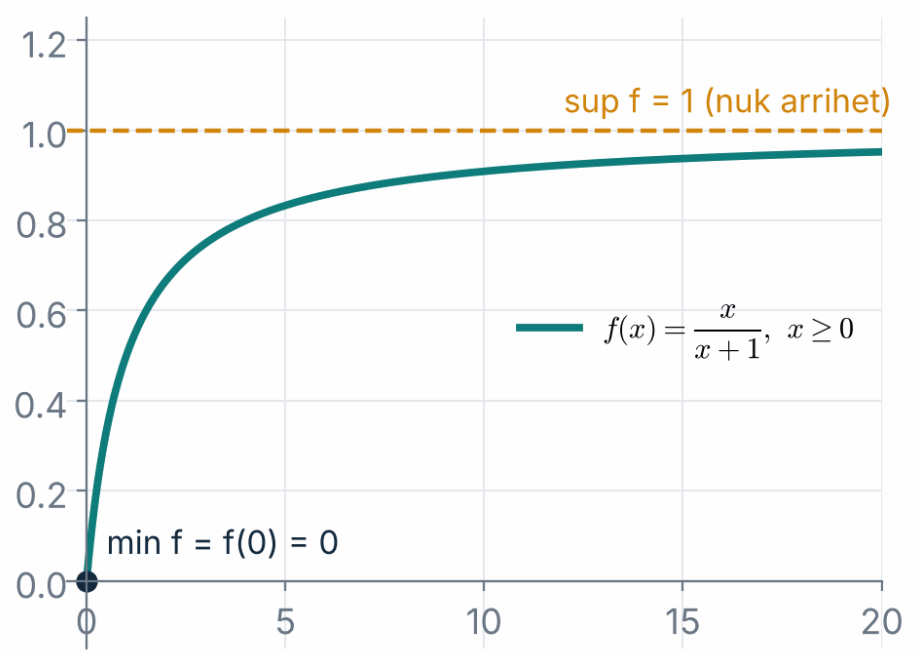
(i) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x+1} < 1$ për çdo x.

(ii) Për $\varepsilon \in (0,1)$ marrim $x > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$:

$$1 - f(x) = \frac{1}{x+1} < \varepsilon$$

Pra $\sup f = 1$, por $1 \notin V(f)$: maksimumi nuk ekziston.

$\inf f = \min f = f(0) = 0$, sepse $f(x) \geq 0$.



IDEJA KYÇE Ky është argumentimi me ε, i njëjti që do të përdoret për limitet.

Shembull: kufizueshmëria pa derivat

SHEMBULL

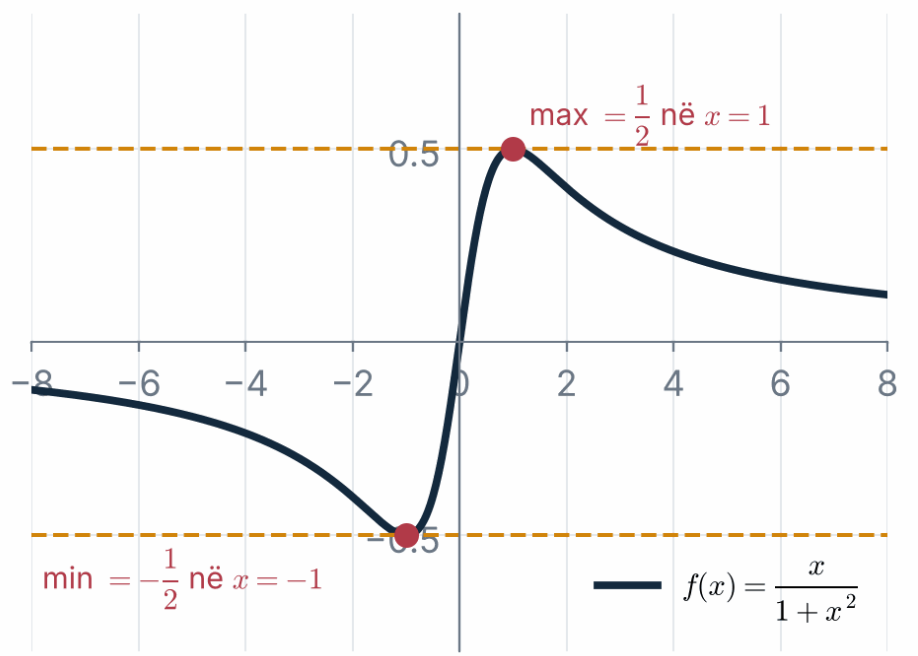
$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Nga $(|x|-1)^2 \geq 0$ kemi $1+x^2 \geq 2|x|$, pra

$$|f(x)| = \frac{|x|}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Barazimi vlen $\iff |x| = 1$: $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(-1) = -\frac{1}{2}$.

Pra $\max f = \frac{1}{2}$, $\min f = -\frac{1}{2}$, $V(f) \subseteq \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.



KUJDES Barazimi $V(f) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ kërkon vazhdueshmërinë, që do ta provojmë në kapitullin përkatës.

Funksionet çift dhe tek

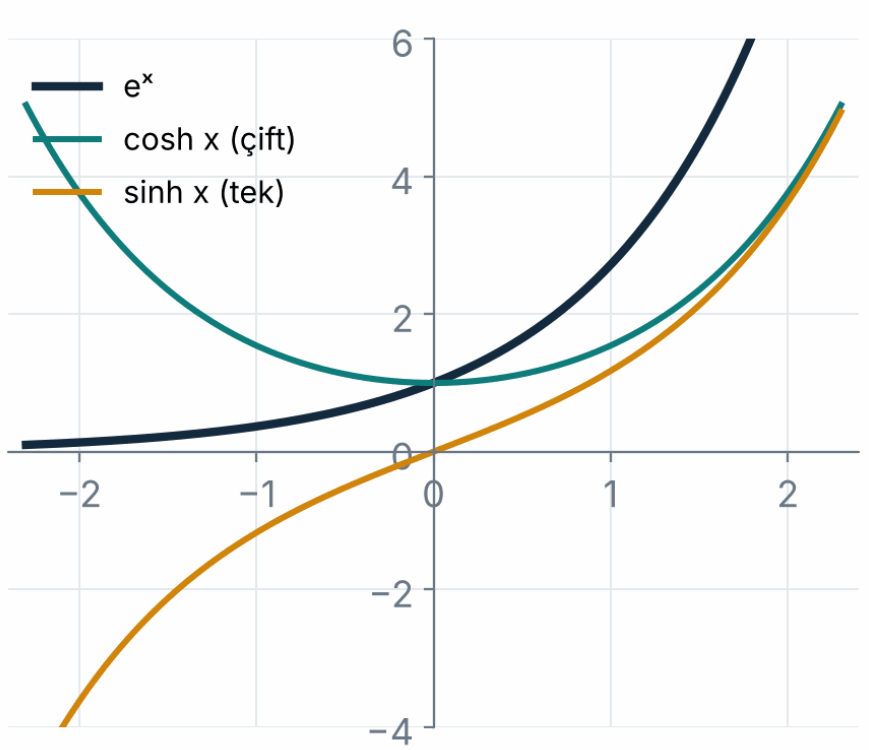
KUSHT PARAPRAK: D SIMETRIKE ($x \in D \Rightarrow -x \in D$)

- **Çift:** $f(-x) = f(x)$; grafiku simetrik ndaj Oy
- **Tek:** $f(-x) = -f(x)$; grafiku simetrik ndaj origjinës

TEOREMË Çdo f me D simetrike shkruhet në mënyrë të vetme si shumë e një funksioni çift dhe një tek:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Shembull: $e^x = \cosh x + \sinh x$.



Periodiciteti

PËRKUFIZIM

f është periodik me periodë $T > 0$ nëse për çdo $x \in D$:

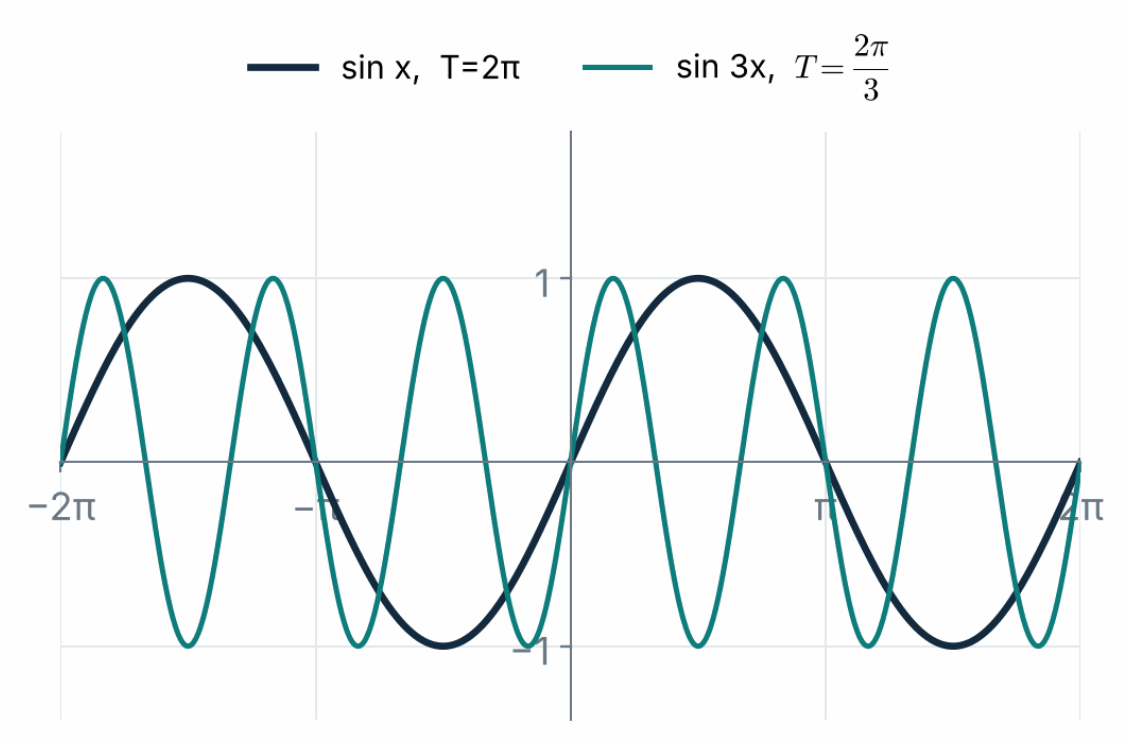
$$x \pm T \in D \quad \text{dhe} \quad f(x+T) = f(x).$$

Periodë themelore: T më e vogël pozitive (nëse ekziston).

SHEMBUJ

sin, cos: 2π · tg, cotg: π · $\{x\}$: 1

$\sin(\omega x)$, $\omega > 0$: $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$



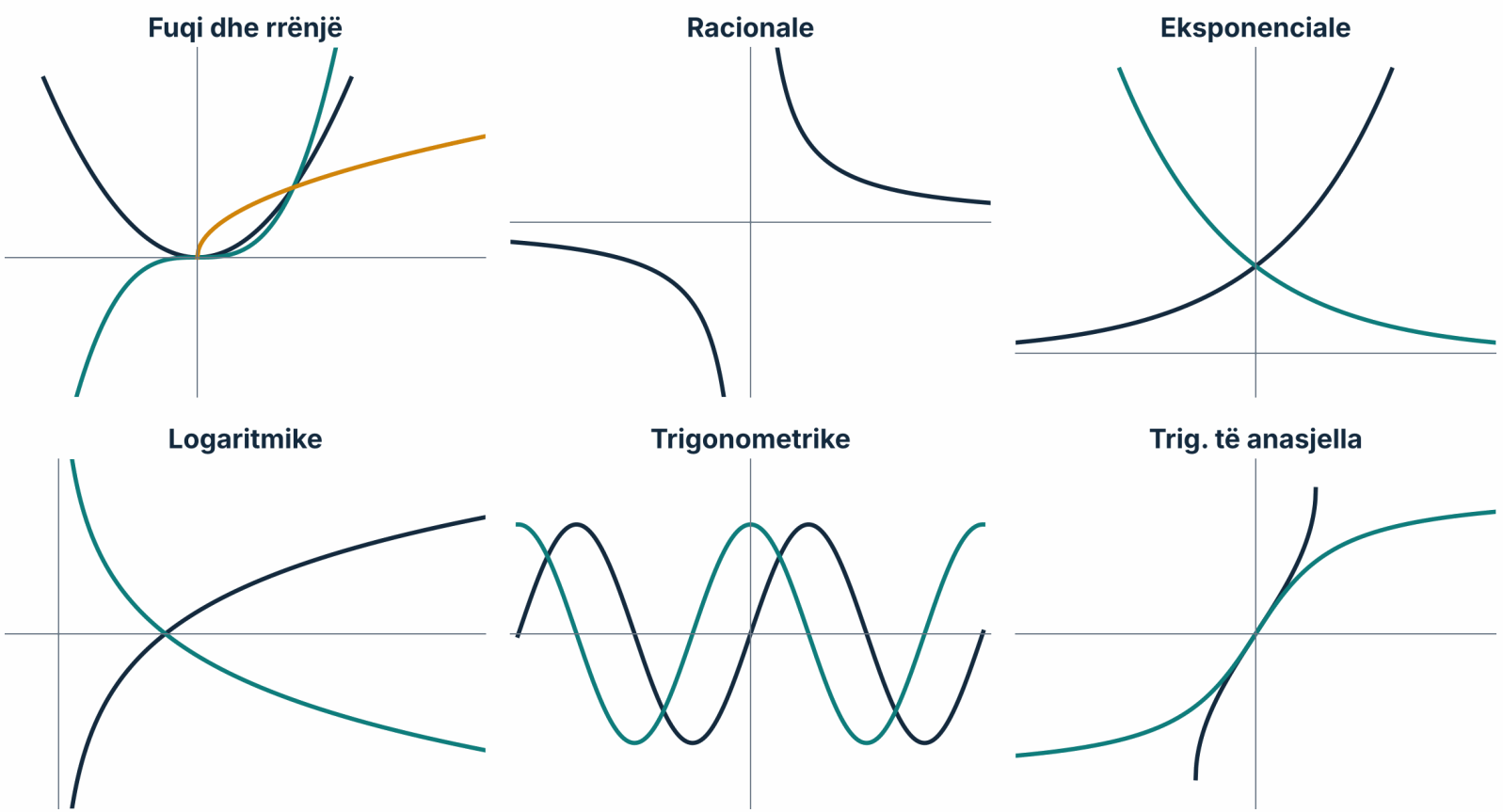
NË INFORMATIKË $n \mapsto n$ mod k është periodik me periodë k në $\mathbb{Z}$: ora, ditët e javës, buferat rrethorë.

IV

Funksionet elementare

Gjashtë familje, shndërrimet e grafikut dhe çiftet funksion – funksion i anasjelltë

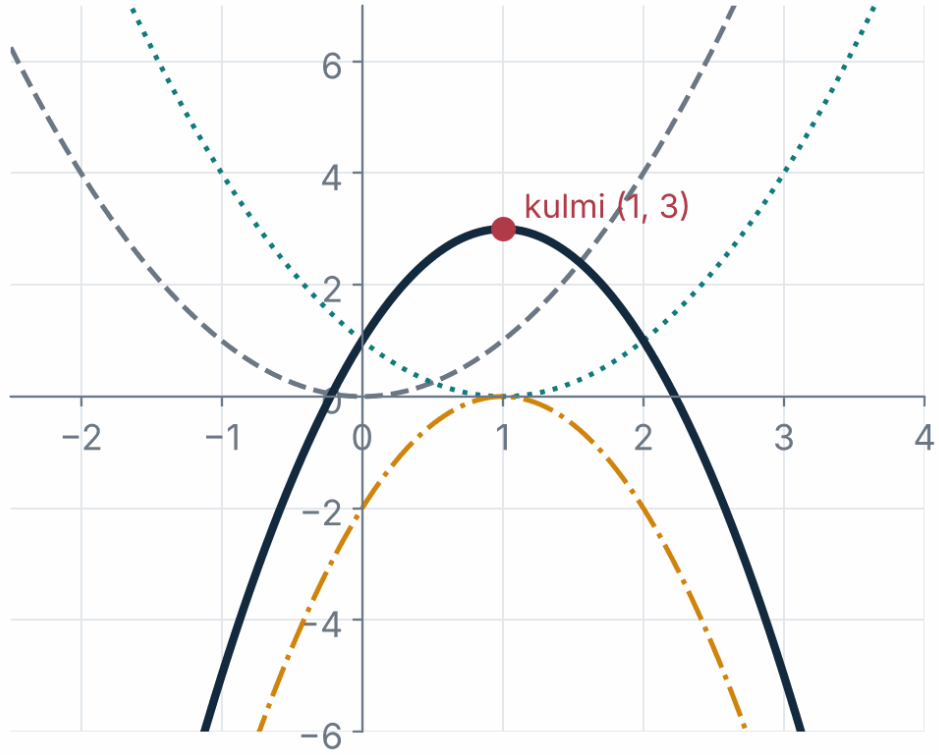
Gjashtë familjet bazë



IDEJA KYÇE Pothuajse çdo funksion i kursit ndërtohet nga këto 6 familje me veprime aritmetike, përbërje dhe shndërrime të grafikut.

Shndërrimet e grafikut

Shprehja	Efekti mbi grafikun e f
$f(x)+b$	zhvendosje vertikale me b
$f(x-a)$	zhvendosje horizontale me a ($a>0$: djathtas)
$a\cdot f(x)$	shtrirje vertikale me faktor a
$f(kx)$	ngjeshje horizontale me faktor k ($k>1$)
$-f(x)$	pasqyrim ndaj boshtit Ox
$f(-x)$	pasqyrim ndaj boshtit Oy
$\lvert f(x)\rvert$	pjesa nën Ox pasqyrohet sipër saj



KUJDES $f(x-2)$ e zhvendos grafikun **djathtas** me 2, jo majtas.

Fuqitë dhe rrënjët

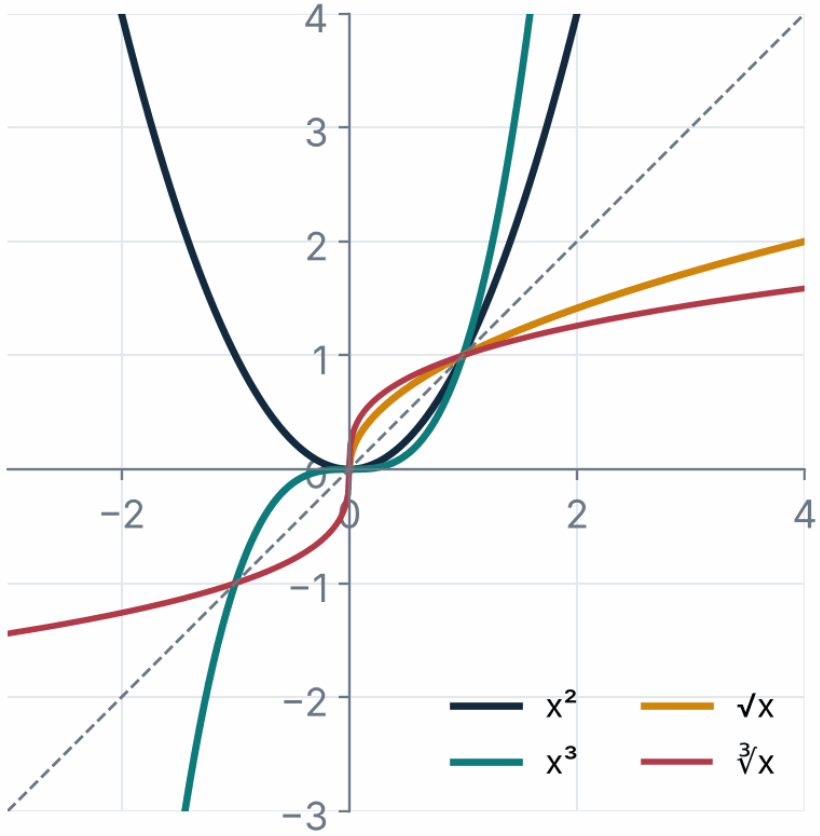
$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

- n **tek:** tek, rreptësisht rritës, bijektiv $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- n **çift:** çift, $V = [0, +\infty)$, injektiv vetëm pas ngushtimit në $[0, +\infty)$

$g(x) = \sqrt[n]{x}$: **FUNKSIONI I ANASJELLTË**

- n **tek:** $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- n **çift:** $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$

KUJDES $\sqrt{x^2} = |x|$, jo x. Shembull: $\sqrt{(-3)^2} = 3$.



Funksionet racionale

PËRKUFIZIMI

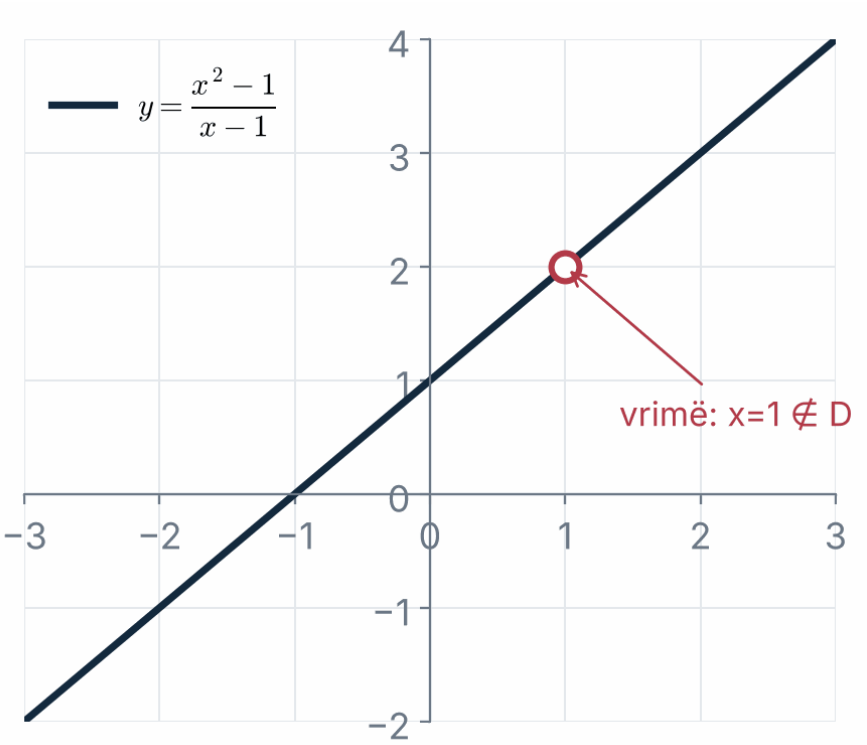
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \qquad D(f) = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$$

Shembull: $\frac{1}{x}$, me $D = V = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; tek, bijektiv dhe $f^{-1} = f$.

"VRIMA" NË GRAFIK

$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$ vetëm për $x \neq 1$.

Grafiku është drejtëz pa pikën $(1, 2)$.



KUJDES Thjeshtimi algjebrik **nuk** e zgjeron bashkësinë e përcaktimit.

Eksponenciali dhe logaritmi: çift i anasjelltë

a^x DHE $\log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$

$a^x : \mathbb{R} \to (0, +\infty), \qquad \log_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

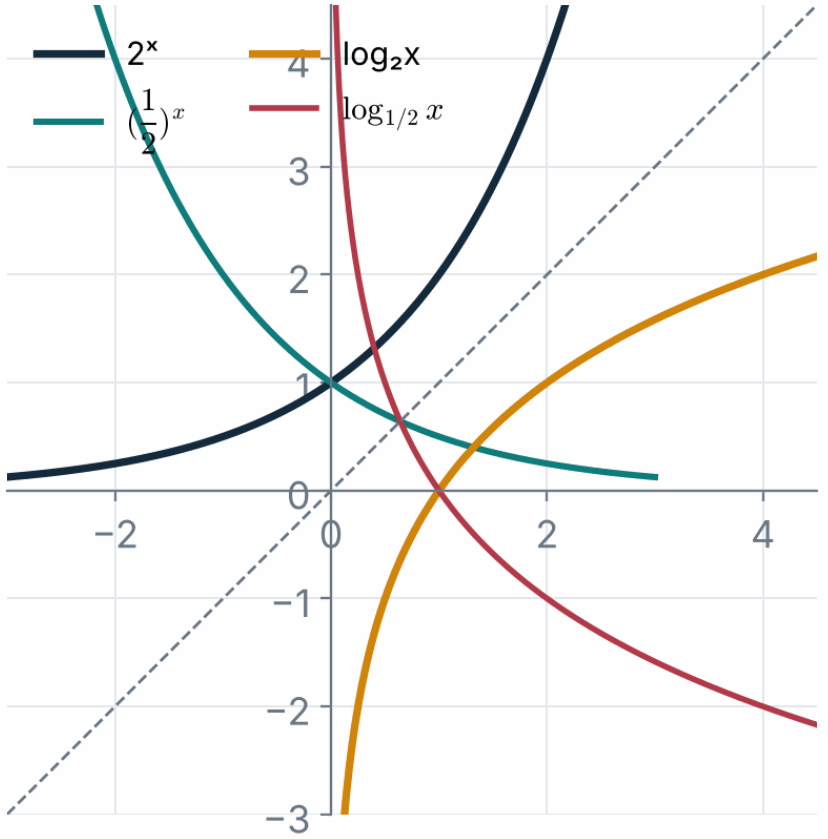
$a > 1$: të dy rreptësisht rritës; $0 < a < 1$: të dy rreptësisht zbritës.

IDENTITETET $(x, y > 0)$

$$a^{x+y} = a^x a^y \quad \leftrightarrow \quad \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

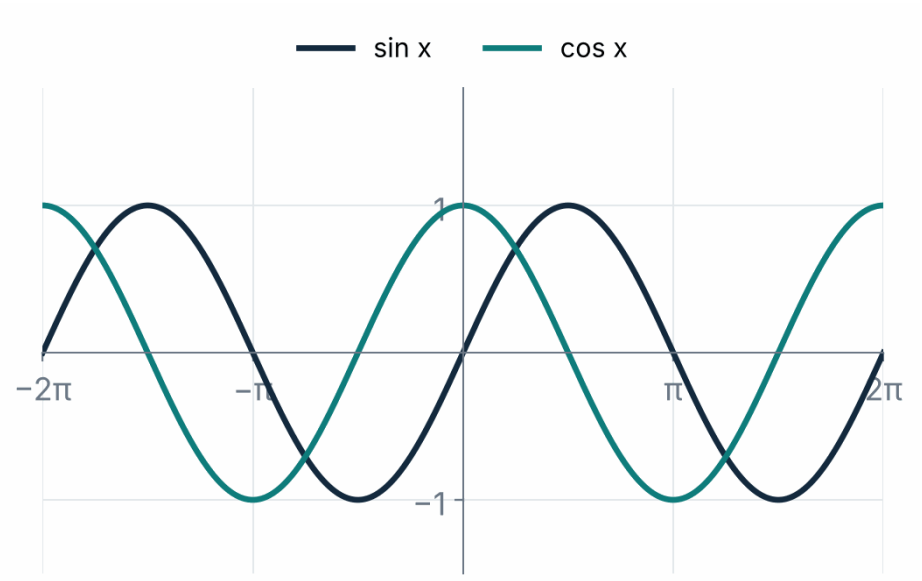
$$\log_a(x^r) = r \log_a x, \qquad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

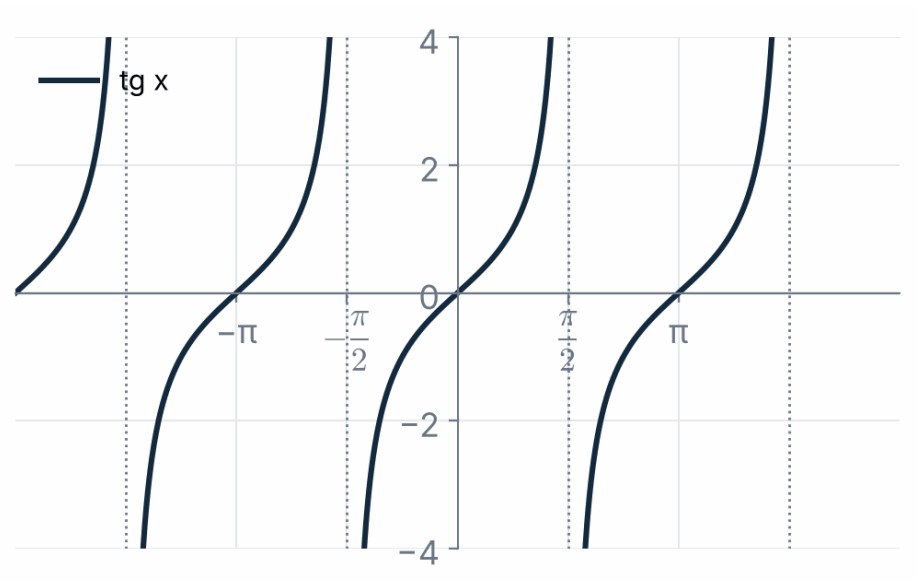
IDEJA KYÇE Eksponenciali e kthen mbledhjen në shumëzim; logaritmi bën të kundërtën.



Funksionet trigonometrike

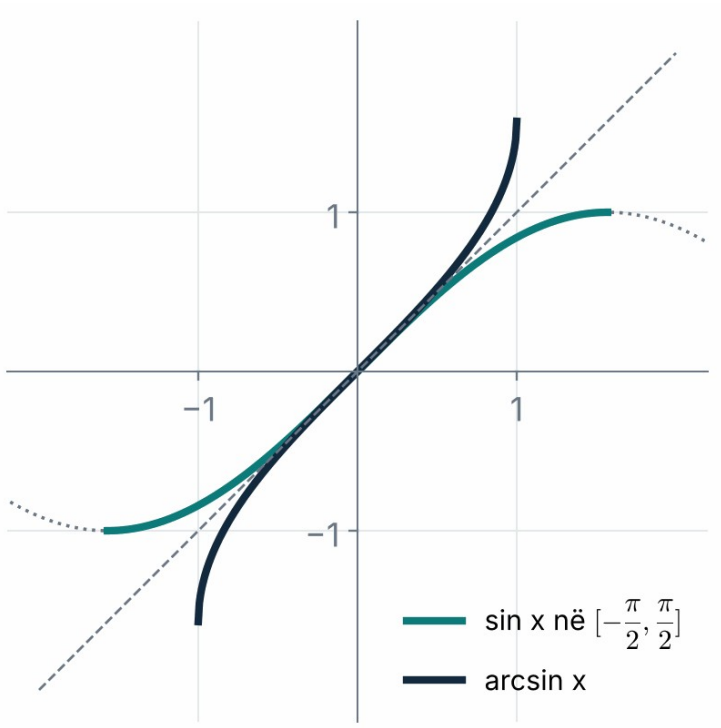
f	$D(f)$	$V(f)$	Periodë	Çiftësia
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	2π	tek
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	2π	çift
$\operatorname{tg} x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$	$\mathbb{R}$	π	tek
$\operatorname{cotg} x$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$	$\mathbb{R}$	π	tek





Funksionet trigonometrike të anasjella

Funksioni	Ngushtimi	$D \to V$	Monotonia
$\arcsin x$	sin në $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$[-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	rritës, tek
$\arccos x$	cos në $[0,\pi]$	$[-1,1] \to [0,\pi]$	zbritës
$\operatorname{arctg} x$	tg në $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	rritës, tek
$\operatorname{arccotg} x$	cotg në $(0,\pi)$	$\mathbb{R} \to (0,\pi)$	zbritës



KUJDES $\sin(\arcsin x) = x$ për çdo $x \in [-1,1]$, por $\arcsin(\sin x) = x$ **vetëm** për $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

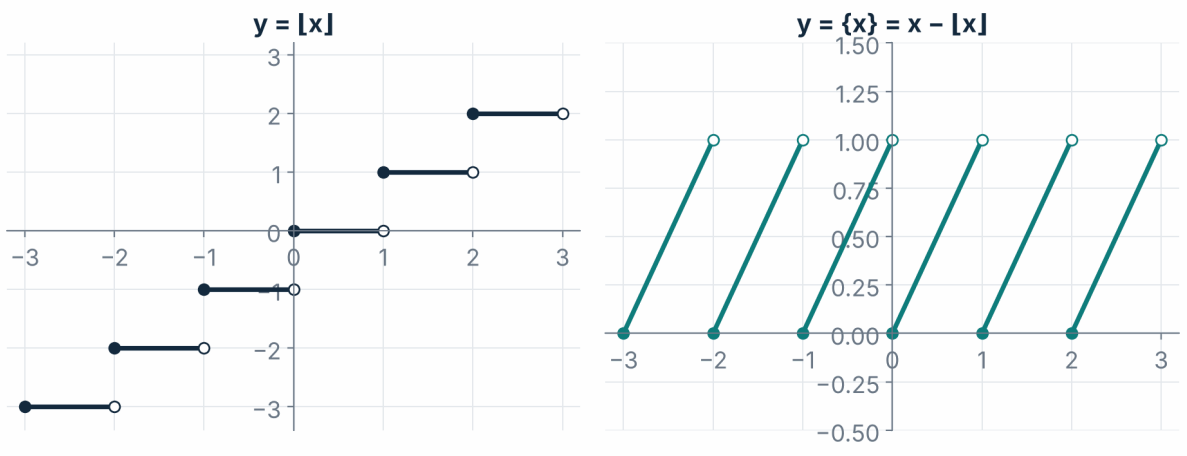
Shembull: $\arcsin(\sin \pi) = \arcsin 0 = 0 \neq \pi$.

Trajtim i plotë: skedari “Funksionet trigonometrike të anasjella”.

Pjesa e plotë, pjesa thyesore, shenja

PËRKUFIZIME

$$\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \le x\}$$
$$\lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} : k \ge x\}$$
$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1)$$
$$\operatorname{sgn} x \in \{-1, 0, 1\}$$



$$\lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1, \qquad \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$$

Shembull: $\lfloor -1{,}2 \rfloor = -2$, $\lceil -1{,}2 \rceil = -1$, $\{-1{,}2\} = 0{,}8$

NË INFORMATIKË Indekse, pjesëtim i plotë, grupim në faqe, diskretizim.

V

Ura drejt informatikës

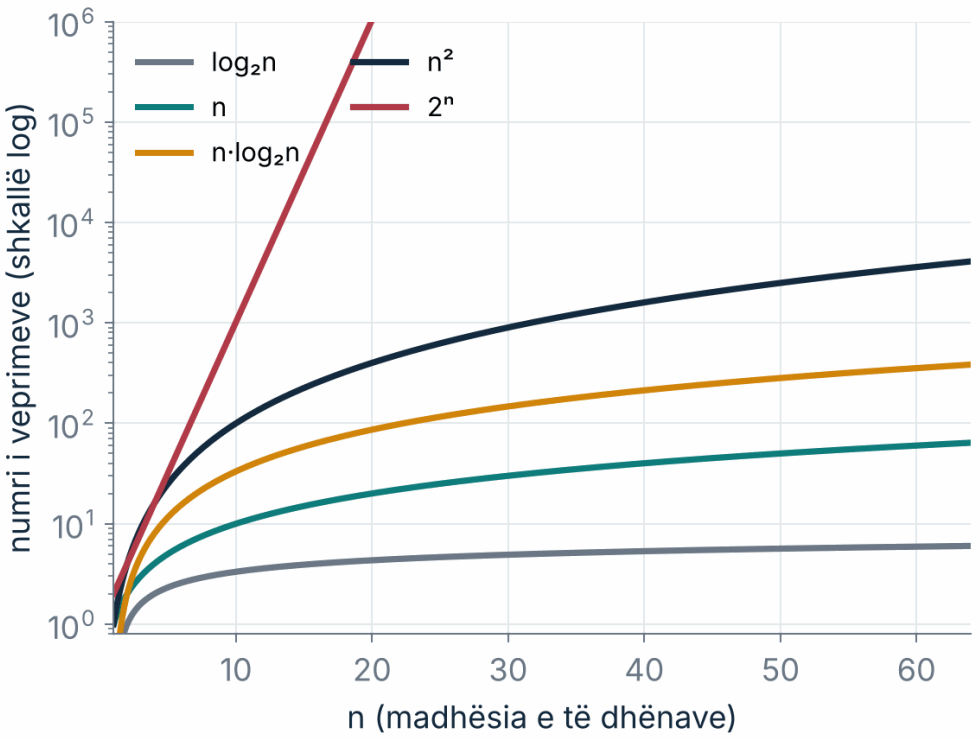
Rritja e funksioneve, logaritmi binar, pjesa e plotë dhe mod, kodimi dhe sigmoidi

Rritja e funksioneve: bazë e kompleksitetit

n	$\log_2 n$	$n \log_2 n$	n^2	2^n
10	$3{,}3$	33	100	$1\,024$
100	$6{,}6$	664	10^4	$\approx 1{,}3 \cdot 10^{30}$
1000	10	$9\,966$	10^6	$\approx 1{,}1 \cdot 10^{301}$

Për n të mëdha:

$$\log n \ll n \ll n \log n \ll n^2 \ll 2^n$$



NË INFORMATIKË Me 10^9 veprime në sekondë, 2^{100} veprime kërkojnë rreth $4 \cdot 10^{13}$ vjet. Algoritmet eksponenciale janë praktikisht të pazbatueshme.

Logaritmi binar në informatikë

PSE $\log_2$?

Çdo hap e përgjysmon problemin:

$$n \to \frac{n}{2} \to \frac{n}{4} \to \cdots \to 1 \quad \text{pas} \approx \log_2 n \text{ hapash}$$

IDEJA KYÇE Kërkimi linear në 10^6 elementë kërkon deri në 10^6 krahasime; kërkimi binar vetëm 20.

Zbatimi	Formula	Shembull
Numri i shifrave binare të $n \geq 1$	$\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$	$n = 10^6 \to 20$ bit
Kërkimi binar në listë të renditur	$\leq \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ krahasime	$n = 10^6 \to 20$ krahasime
Lartësia e pemës binare të balancuar	$\approx \log_2 n$	$n = 10^6 \to \approx 20$ nivele

SHEMBULL

Kërkojmë një emër në listë të renditur me 1 000 000 emra: pas krahasimit 1 mbeten $\leq 500\,000$, pas 2 $\leq 250\,000$, ..., pas 20 mbetet 1.

Pjesa e plotë dhe mod

PËRKUFIZIMI MATEMATIK ($n > 0$)

$$a \bmod n = a - n\left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

$$-7 \bmod 3 = -7 - 3\left\lfloor -\frac{7}{3} \right\rfloor = -7 - 3 \cdot (-3) = 2$$

KUJDES Në Python: `-7 % 3 == 2` (si në matematikë).
Në C/Java: `-7 % 3 == -1` (rrumbullakim drejt zeros).

ZBATIME

- Mesi në kërkimin binar:
  $$m = \left\lfloor \frac{l + r}{2} \right\rfloor$$
- N rreshta, k për faqe:
  $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ faqe
- Indeksi në tabelë hash:
  $h(k) = k \bmod m$

IDEJA KYÇE $\lfloor x \rfloor$ dhe $\lceil x \rceil$ janë ura midis $\mathbb{R}$ dhe $\mathbb{Z}$, pra midis analizës dhe botës diskrete të kompjuterit.

Bijeksionet dhe jo-injektiviteti në informatikë

KODI I CEZARIT NË $\mathbb{Z}_{26}$

$$E(x) = (x + k) \bmod 26$$

$$D(y) = (y - k) \bmod 26 = E^{-1}(y)$$

E është bijektiv, prandaj dekriptimi është i mundur.

KODIMI I KARAKTEREVE

ASCII / Unicode: karakter $\leftrightarrow$ numër.

Bijeksion midis dy bashkësive të fundme: çdo kod ka saktësisht një karakter.

FUNKSIONI HASH

$h : \{\text{të dhëna}\} \to \{0,1\}^{256}$ nuk është injektiv (parimi i Dirikleit).

Përplasjet ekzistojnë; siguria mbështetet në vështirësinë për t'i gjetur.

TEOREMË Asnjë algoritëm kompresimi pa humbje nuk e shkurton **çdo** skedar.

Vargje binare me gjatësi n: 2^n. Vargje më të shkurtra: $2^n - 1$. Funksioni nuk mund të jetë injektiv.

Rast studimor: funksioni sigmoid

FUNKSIONI

$$\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}, \qquad D = \mathbb{R}$$

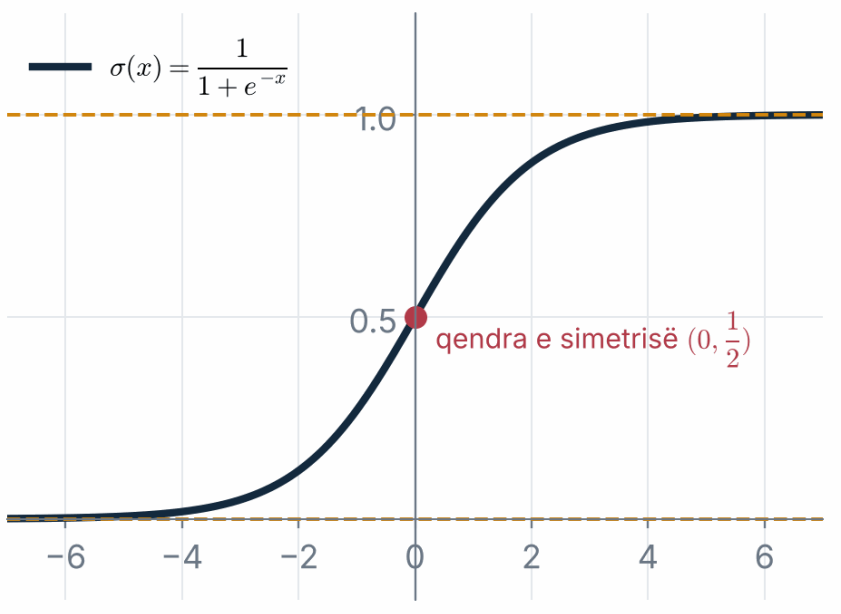
Monotonia. $x_1 < x_2 \Rightarrow e^{-x_1} > e^{-x_2} \Rightarrow 1+e^{-x_1} > 1+e^{-x_2} > 0 \Rightarrow \sigma(x_1) < \sigma(x_2)$: rreptësisht rritës.

Kufizueshmëria. $0 < \sigma(x) < 1$; $\inf \sigma = 0$, $\sup \sigma = 1$, pa min dhe pa max.

Simetria. $\sigma(-x) = 1 - \sigma(x)$: as çift, as tek, por simetrik ndaj pikës $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Funksioni i anasjelltë. $\sigma : \mathbb{R} \to (0,1)$ është bijektiv dhe

$$\sigma^{-1}(y) = \ln \frac{y}{1-y} \qquad \text{(funksioni logit)}$$



NË INFORMATIKË Regresioni logjistik dhe rrjetet neurale: σ e kthen çdo numër real në probabilitet në $(0,1)$.



Përmbledhje dhe ushtrime

Gabimet tipike, algoritmi i analizës, detyra me zgjidhje të plota

Gabime konceptuale që duhen shmangur

1 $V(f) = B$ pa provë: V llogaritet, B deklarohet.

2 Testi vertikal për injektivitetin; duhet testi horizontal.

3 Surjektiviteti pa deklaruar B.

4 $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

5 Thjeshtimi i $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ "e zgjeron" D.

6 Çift/tek pa kontrolluar simetrinë e D.

7 Monoton në dy intervale $\Rightarrow$ monoton në bashkimin e tyre $\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

8 $\arcsin(\sin x) = x$ për çdo x.

9 $\sqrt{x^2} = x$.

10 sup $=$ max, edhe kur supremumi nuk arrihet.

Algoritmi i analizës së një funksioni

1. **Bashkësia e përcaktimit**
   kushtet veç e veç, pastaj prerja

2. **Çiftësia, periodiciteti**
   zvogëlojnë zonën e studimit

3. **Zerot dhe shenja**
   zgjidh $f(x) = 0$ dhe $f(x) > 0$

4. **Monotonia**
   shenja e $f(x_2) - f(x_1)$ (më vonë: derivati)

5. **Kufizueshmëria**
   sup, inf, max, min

6. **Bashkësia e vlerave**
   provë me dy përfshirje

7. **Inj. / surj. ndaj B**
   nëse bijektiv, ndërto f^{-1}

IDEJA KYÇE Çdo përfundim **provohet algjebrikisht**; grafiku shërben për të kontrolluar, jo për të provuar.

Ushtrime për punë të pavarur

1. Gjeni $D(f)$ për $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{\ln(5 - x)}$.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x$. Gjeni $f([0, 3])$ dhe $f^{-1}([-3, 0])$.

3. Provoni që $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$, është bijektiv dhe gjeni f^{-1}.

4. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$. Sa funksione $A \to B$ ka? Sa injektive? Sa surjektive?

5. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 1 - x^2$. Gjeni $f \circ g$, $g \circ f$ dhe bashkësitë e tyre të përcaktimit.

6. Provoni pa derivat që $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ është rreptësisht rritës në $[1, +\infty)$.

7. Klasifikoni (çift / tek / asnjë): $\ln \dfrac{1 - x}{1 + x}$, $x \sin x$, $2^x + 2^{-x}$, $x^2 + x$.

8. Algoritmi A kryen n^2 veprime, B kryen $100\, n \log_2 n$. Nga cili n e tutje B është më i shpejtë?

Zgjidhje: ushtrimet 1–4

USHTRIMI 1

$x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x \leq -2$ ose $x \geq 2$;
$5 - x > 0 \Rightarrow x < 5$; $\ln(5-x) \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$.

$$D = (-\infty, -2] \cup [2, 4) \cup (4, 5)$$

USHTRIMI 2

$f(x) = (x-2)^2 - 4$. Në $[0,3]$: min $f(2) = -4$, max $f(0) = 0$; për $y \in [-4, 0]$, $x = 2 - \sqrt{y+4} \in [0, 2]$.

$$f([0,3]) = [-4, 0]$$

$1 \leq |x-2| \leq 2 \Rightarrow f^{-1}([-3,0]) = [0,1] \cup [3,4]$

USHTRIMI 3

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1 - 1)(x_2 + 1) = (x_2 - 1)(x_1 + 1) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2$.

$y = \dfrac{x-1}{x+1} \Rightarrow x = \dfrac{1+y}{1-y}$, dhe $x \neq -1$ (përndryshe $1 + y = y - 1$).

$$f^{-1}(y) = \frac{1+y}{1-y}$$

USHTRIMI 4

Të gjitha: $4^3 = 64$.

Injektive: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Surjektive: 0, sepse $|A| < |B|$.

Zgjidhje: ushtrimet 5–8

USHTRIMI 5

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{1-x^2}, \qquad D = [-1, 1]$$
$$(g \circ f)(x) = 1 - (\sqrt{x})^2 = 1 - x$$

por $D = [0, +\infty)$, **jo** $\mathbb{R}$.

USHTRIMI 6

Për $1 \le x_1 < x_2$:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)\left(1 - \frac{1}{x_1 x_2}\right) > 0,$$

sepse $x_2 - x_1 > 0$ dhe $x_1 x_2 > 1$.

USHTRIMI 7

ln $\dfrac{1-x}{1+x}$: $D = (-1, 1)$, **tek**.

$x \sin x$: **çift** (prodhim i dy funksioneve tek).

$2^x + 2^{-x}$: **çift**. $x^2 + x$: **asnjë** ($f(-1) = 0$, $f(1) = 2$).

USHTRIMI 8

$n^2 > 100\, n \log_2 n \iff n > 100 \log_2 n$.

$n = 996$: $100 \log_2 996 \approx 996{,}0 > 996$.

$n = 997$: $100 \log_2 997 \approx 996{,}1 < 997$.

B është më i shpejtë për çdo $n \ge 997$.

Literatura

Mukli, Muka, Hysa Matematika 1: teksti bazë i kursit.

J. Stewart Calculus: Early Transcendentals, Kreu 1: funksionet dhe modelet.

M. Spivak Calculus, Kreu 3–4: funksionet dhe grafikët, argumentim rigoroz.

T. M. Apostol Calculus, Vol. 1: bashkësitë, funksionet, aksioma e plotësisë.

K. H. Rosen Discrete Mathematics and Its Applications: funksionet dhe rritja e funksioneve.

T. H. Cormen et al. Introduction to Algorithms: rritja e funksioneve dhe shënimet asimptotike.