ANALIZË MATEMATIKE I · BACHELOR NË INFORMATIKË, VITI I

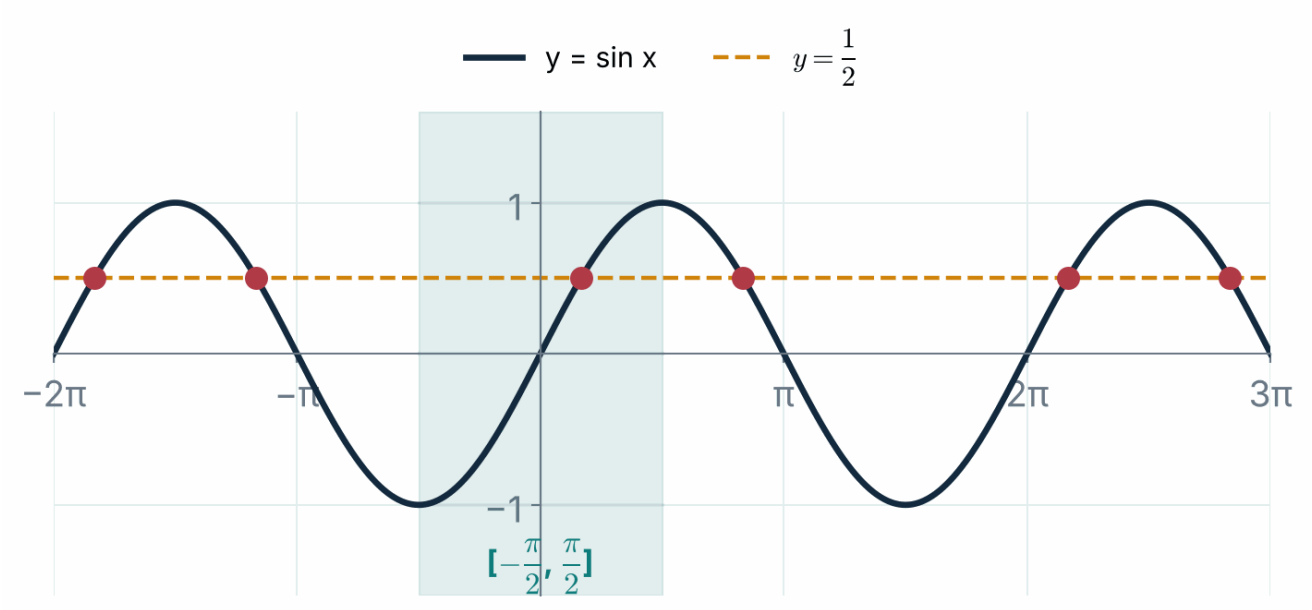
Funksionet trigonometrike të anasjella

Përkufizimi, grafiku dhe vetitë e arcsin, arccos, arctg, arccotg, arcsec, arccosec, si dhe funksionet sekant dhe kosekant

$$y = \arcsin x \iff \sin y = x, \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Prof. As. Dr. Siditë Duraj · Departamenti i Matematikës, FSHN · Universiteti i Shkodrës «Luigj Gurakuqi»

Problemi: sinusi nuk është injektiv



Ekuacioni $\sin x = \dfrac{1}{2}$ ka pafundësisht shumë zgjidhje:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ose} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Pra $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ **nuk** ka funksion të anasjelltë.

IDEJA KYÇE E ngushtojmë sinusin në $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, ku është bijektiv. Funksioni i anasjelltë i këtij ngushtimi quhet **arcsin**.

Parimi i ndërtimit: ngushtimi në degën kryesore

1. Gjejmë një interval I ku f është rreptësisht monoton, pra injektiv, dhe merr të gjitha vlerat e veta.
2. Ngushtimi $f|_I : I \to V(f)$ është bijektiv.
3. Funksioni i anasjelltë $(f|_I)^{-1} : V(f) \to I$ ekziston dhe merr emrin “arc”.

KUJDES Zgjedhja e degës është **konventë**. Për arcsin, arccos dhe arctg ajo është e njëjtë kudo. Për arccotg, arcsec dhe arccosec tekstet ndryshojnë; ne përdorim konventën e tabelës.

Funksioni	Dega kryesore	I anasjellti
$\sin x$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$\arcsin x$
$\cos x$	$[0, \pi]$	$\arccos x$
$\operatorname{tg} x$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\operatorname{arctg} x$
$\operatorname{cotg} x$	$(0, \pi)$	$\operatorname{arccotg} x$
$\sec x$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$	$\operatorname{arcsec} x$
$\operatorname{cosec} x$	$\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$	$\operatorname{arccosec} x$

I

Sekanti dhe kosekanti

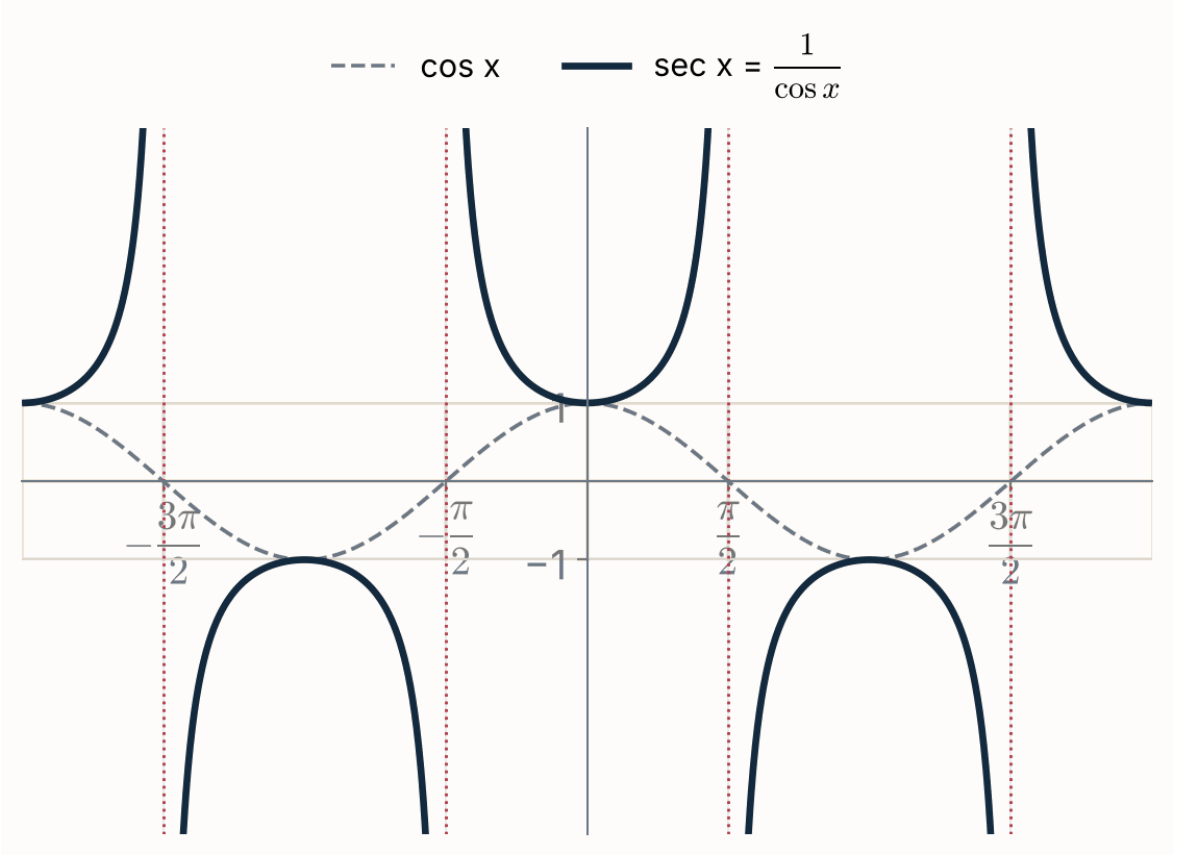
Dy funksionet trigonometrike reciproke: përkufizimi, grafiku dhe vetitë

Funksioni sekant

PËRKUFIZIMI DHE VETITË

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

- $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$
- $V = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
- **çift:** $\sec(-x) = \sec x$
- periodik, me periodë themelore 2π
- asimptota vertikale $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$



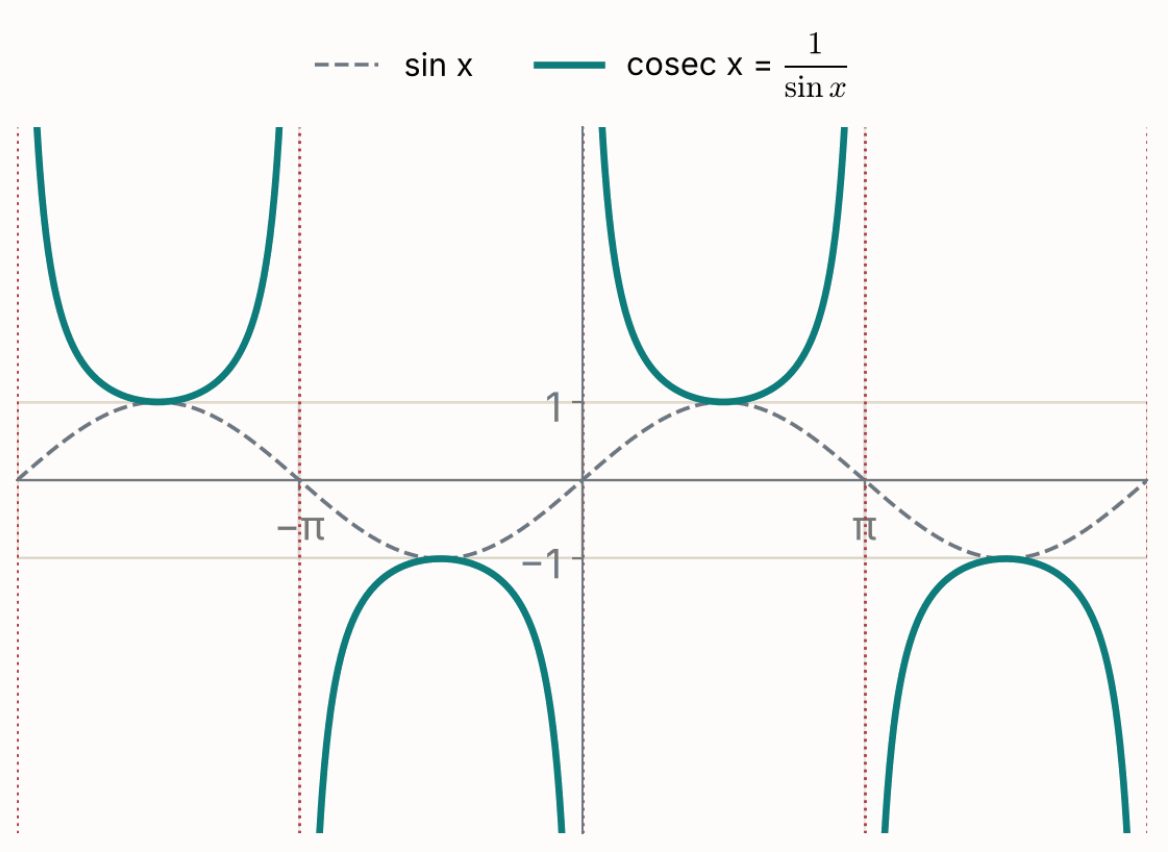
IDEJA KYÇE $|\cos x| \leq 1 \Rightarrow |\sec x| \geq 1$. Prandaj grafiku nuk hyn kurrë në shiritin $-1 < y < 1$.

Funksioni kosekant

PËRKUFIZIMI DHE VETITË

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

- $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$
- $V = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
- **tek:** $\operatorname{cosec}(-x) = -\operatorname{cosec} x$
- periodik, me periodë themelore 2π
- asimptota vertikale $x = k\pi$



KUJDES $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} \neq \arcsin x$. Shënimi $\sin^{-1} x$ do të thotë $\arcsin x$, jo $\frac{1}{\sin x}$.

Sekanti dhe kosekanti: identitete dhe vlera

IDENTITETET THEMELORE

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$$

Provë: pjesëtojmë $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ *me* $\cos^2 x$, *përkatësisht me* $\sin^2 x$.

MONOTONIA NË DEGËT KRYESORE

- sec: rritës në $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ dhe në $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
- cosec: zbritës në $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ dhe në $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

Në bashkimin e dy pjesëve janë injektivë, por jo monotonë.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sec x$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	—
$\operatorname{cosec} x$	—	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

IDEJA KYÇE Shembull i rrallë: funksion **injektiv por jo monoton** në bashkësinë ku e përdorim.

II

arcsin dhe arccos

Funksionet e anasjella të sinusit dhe kosinusit

Funksioni arcsin: përkufizimi

NGUSHTIMI

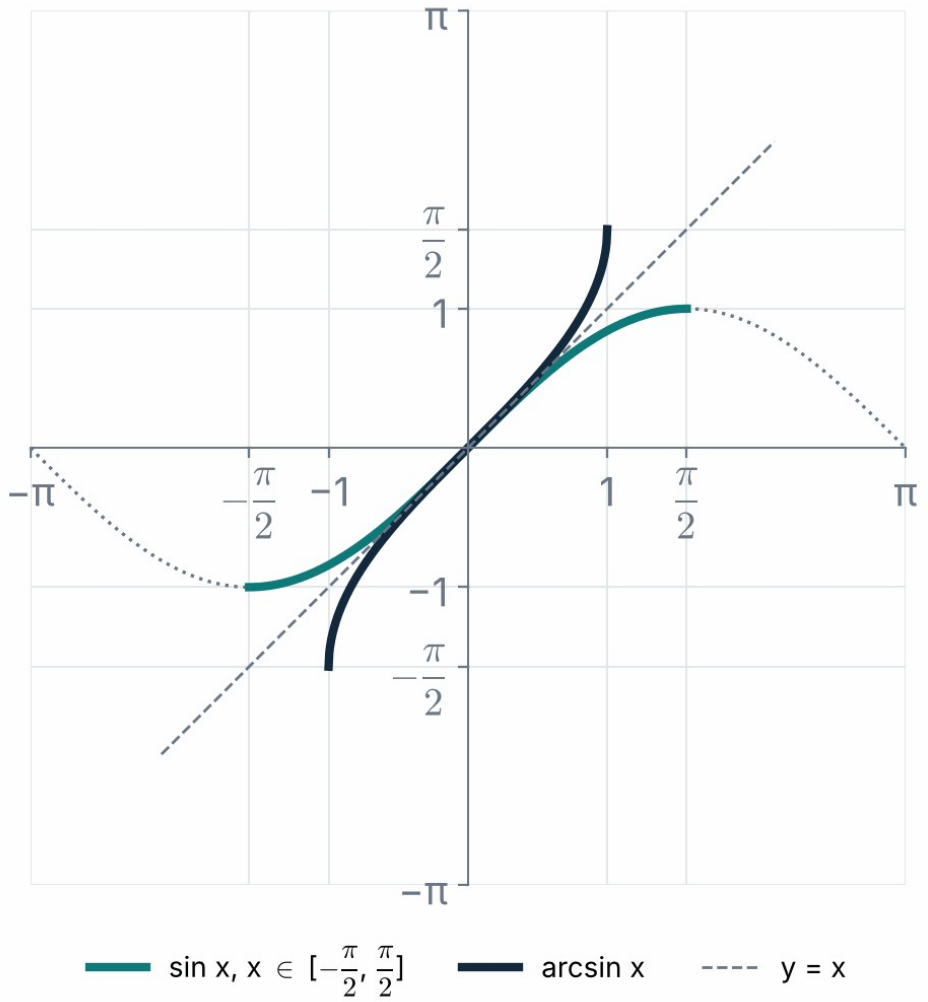
$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ është rreptësisht rritës dhe surjektiv, pra **bijektiv**.

PËRKUFIZIMI

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$y = \arcsin x \iff \sin y = x \text{ dhe } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

IDEJA KYÇE $\arcsin x$ është **këndi** në $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ që ka sinusin x. Grafiku: pasqyrimi i degës kryesore të sinusit ndaj $y = x$.



Funksioni arcsin: vetitë

VETITË

- $D = [-1, 1],\ V = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- **tek:** $\arcsin(-x) = -\arcsin x$
- rreptësisht rritës
- $\max = \frac{\pi}{2}$ në $x = 1,\ \min = -\frac{\pi}{2}$ në $x = -1$

FORMULË

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$$

Provë. $\theta = \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos\theta \geq 0,$ prandaj $\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{1 - x^2}$.

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

KUJDES $\arcsin 2$ nuk ekziston në $\mathbb{R}$: bashkësia e përcaktimit është vetëm $[-1, 1]$.

Funksioni arccos: përkufizimi

NGUSHTIMI

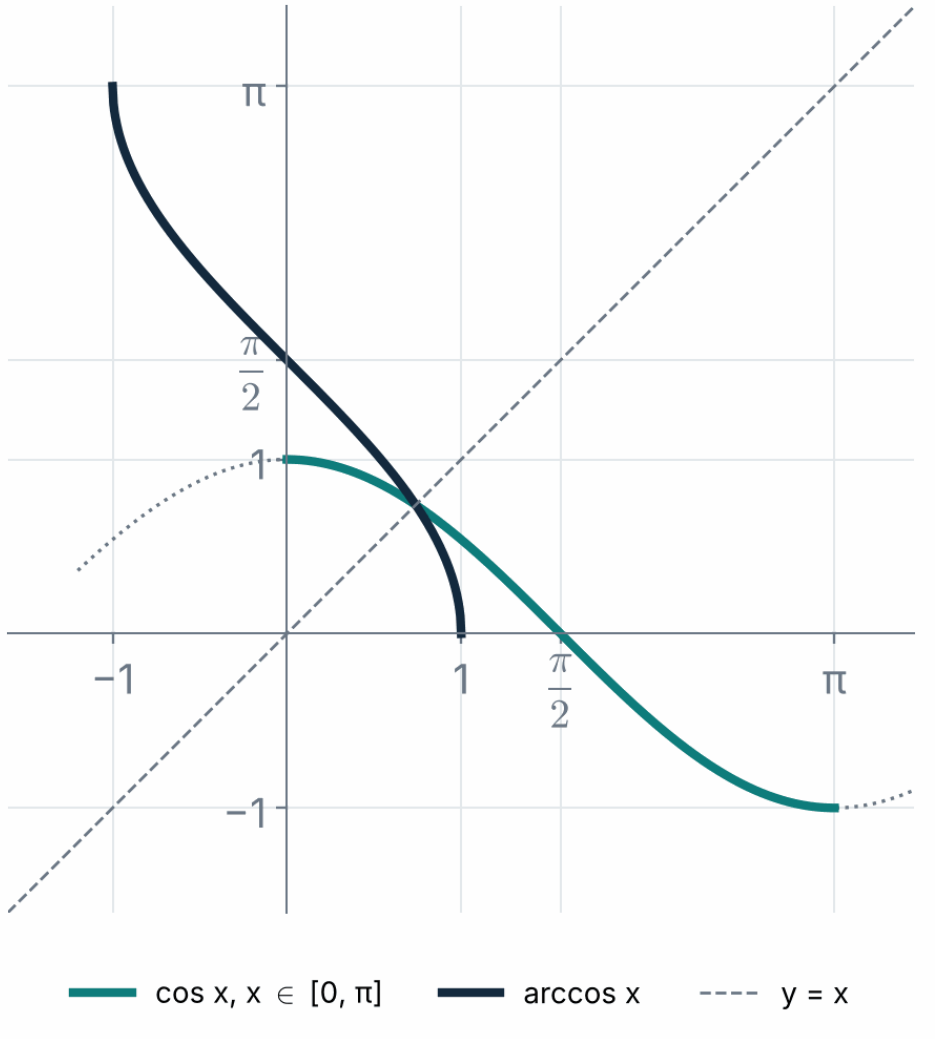
$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ është rreptësisht zbritës dhe surjektiv, pra **bijektiv**.

PËRKUFIZIMI

$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$

$y = \arccos x \iff \cos y = x$ dhe $y \in [0, \pi]$

KUJDES Dega kryesore e kosinusit është $[0, \pi]$, jo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$: atje kosinusi nuk është injektiv, sepse $\cos(-x) = \cos x$.



Funksioni arccos: vetitë

VETITË

- $D = [-1, 1],\ V = [0, \pi]$
- rreptësisht zbritës
- **as çift, as tek:** $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$
- $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$

TEOREMË

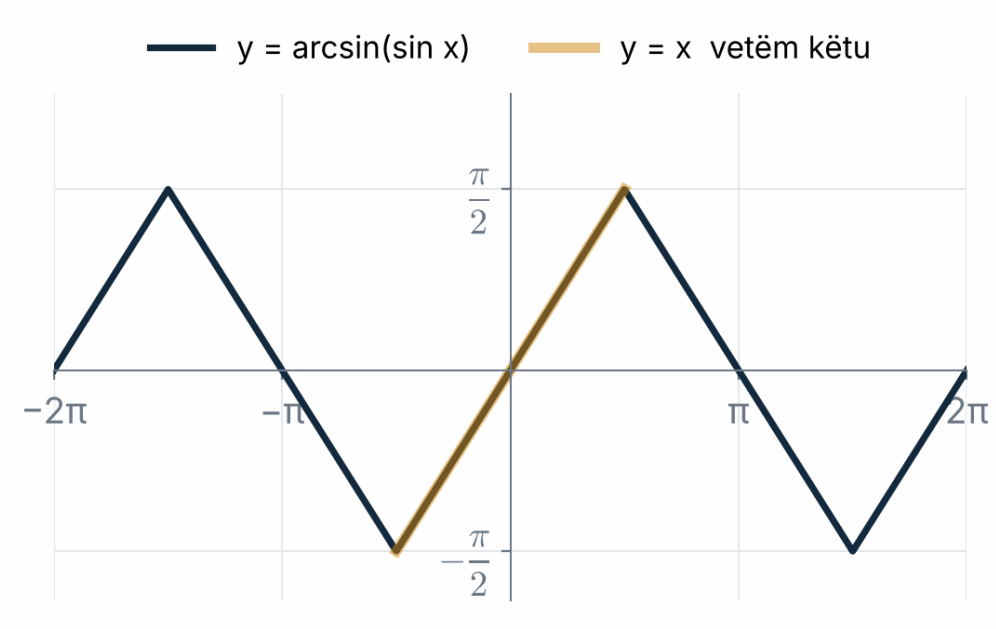
$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in [-1, 1]$$

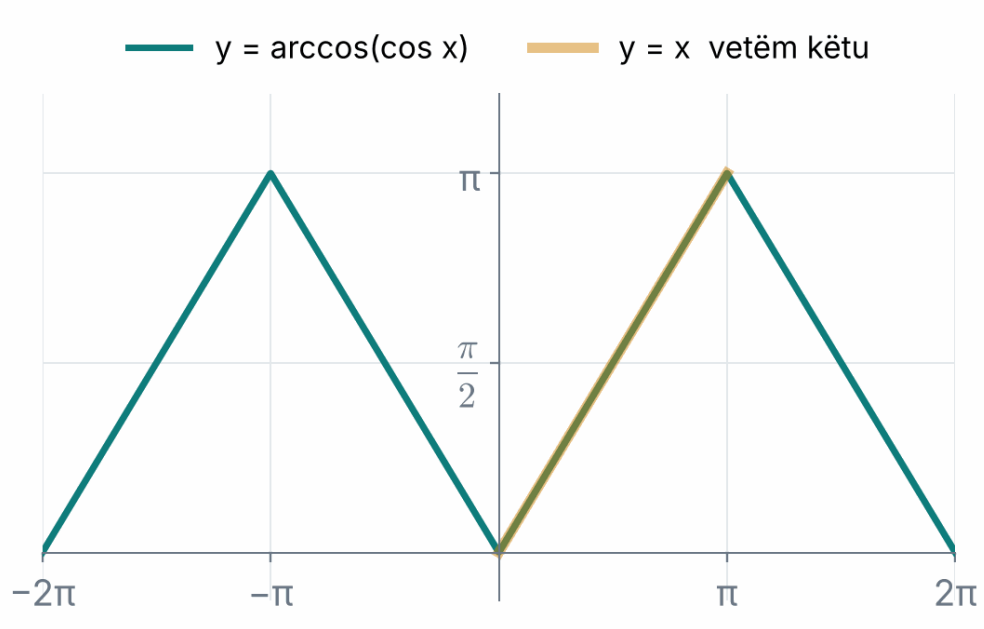
Provë. $\theta = \frac{\pi}{2} - \arccos x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dhe $\sin\theta = \cos(\arccos x) = x$, pra $\theta = \arcsin x$.

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

KUJDES $\arccos(-x) \neq -\arccos x$. Shembull: $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$, ndërsa $-\arccos\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{3}$.

Përbërja: kur thjeshtohen “sin” dhe “arcsin”?





$\sin(\arcsin x) = x$ për çdo $x \in [-1, 1]$

$\arcsin(\sin x) = x$ **vetëm** për $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Shembull: $\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$

$\cos(\arccos x) = x$ për çdo $x \in [-1, 1]$

$\arccos(\cos x) = x$ **vetëm** për $x \in [0, \pi]$

Shembull: $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$

III

arctg dhe arccotg

Funksionet e anasjella të tangjentit dhe kotangjentit, të përcaktuara në gjithë $\mathbb{R}$

Funksioni arctg: përkufizimi

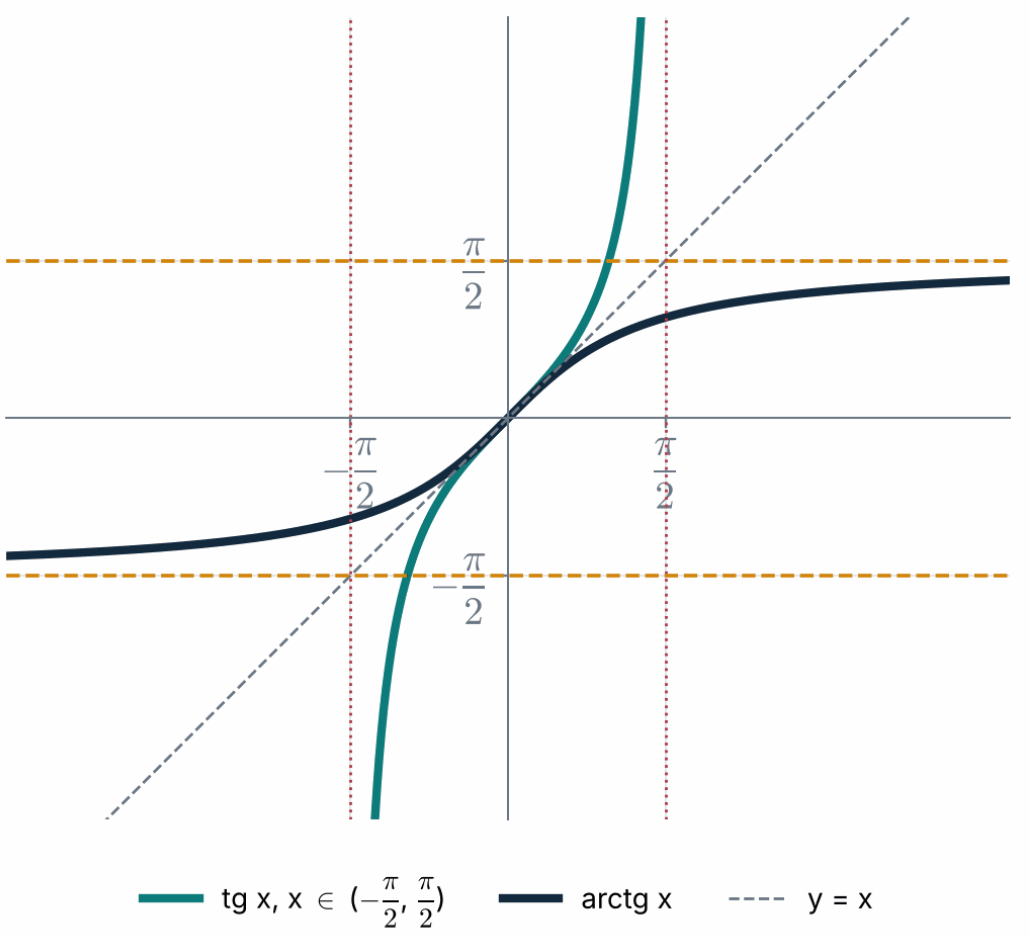
NGUSHTIMI

$\text{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ është rreptësisht rritës dhe surjektiv, pra **bijektiv**.

PËRKUFIZIMI

$$\text{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y = \text{arctg}\, x \iff \text{tg}\, y = x \quad \text{dhe} \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$



IDEJA KYÇE Asimptotat vertikale të tg, $x = \pm\frac{\pi}{2}$, bëhen asimptota **horizontale** të arctg: $y = \pm\frac{\pi}{2}$.

Funksioni arctg: vetitë

VETITË

- $D = \mathbb{R},\ V = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
- **tek**, rreptësisht rritës
- inf $= -\frac{\pi}{2}$, sup $= \frac{\pi}{2}$; pa min dhe pa max
- $\cos(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

TEOREMË

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \quad x > 0$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}, \quad x < 0$$

Provë për $x > 0$: ushtrimi 5.

x	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

IDEJA KYÇE arctg është i kufizuar edhe pse përcaktohet në gjithë $\mathbb{R}$: supremumi $\frac{\pi}{2}$ nuk arrihet kurrë.

Funksioni arccotg: përkufizimi dhe vetitë

PËRKUFIZIMI

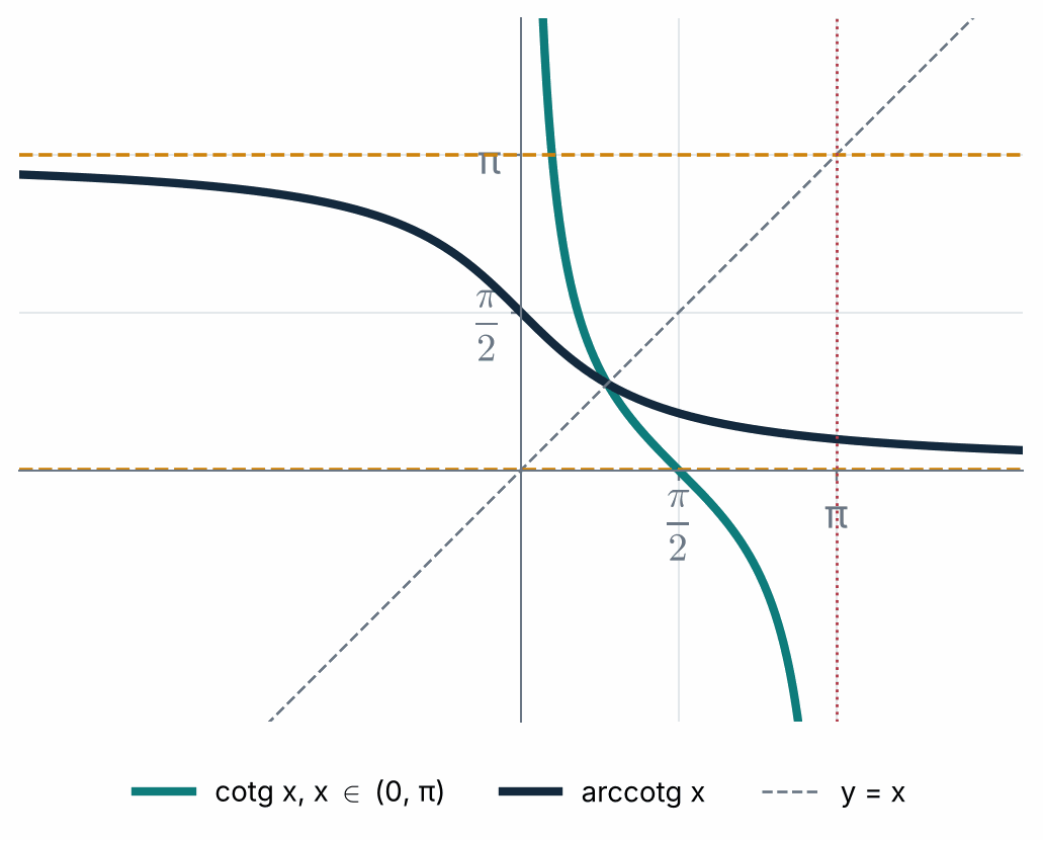
cotg : $(0, \pi) \to \mathbb{R}$ është rreptësisht zbritës dhe bijektiv.

arccotg : $\mathbb{R} \to (0, \pi)$

$$y = \operatorname{arccotg} x \iff \operatorname{cotg} y = x,\ y \in (0, \pi)$$

VETITË

- rreptësisht zbritës; asimptota $y = 0$ dhe $y = \pi$
- $\operatorname{arccotg}(-x) = \pi - \operatorname{arccotg} x$
- $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \dfrac{\pi}{2}$



KUJDES Disa tekste përdorin $\operatorname{arccotg} x = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$, me vlera në $\left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Ne përdorim $(0, \pi)$, ku arccotg është i vazhdueshëm.

Në informatikë: funksioni atan2

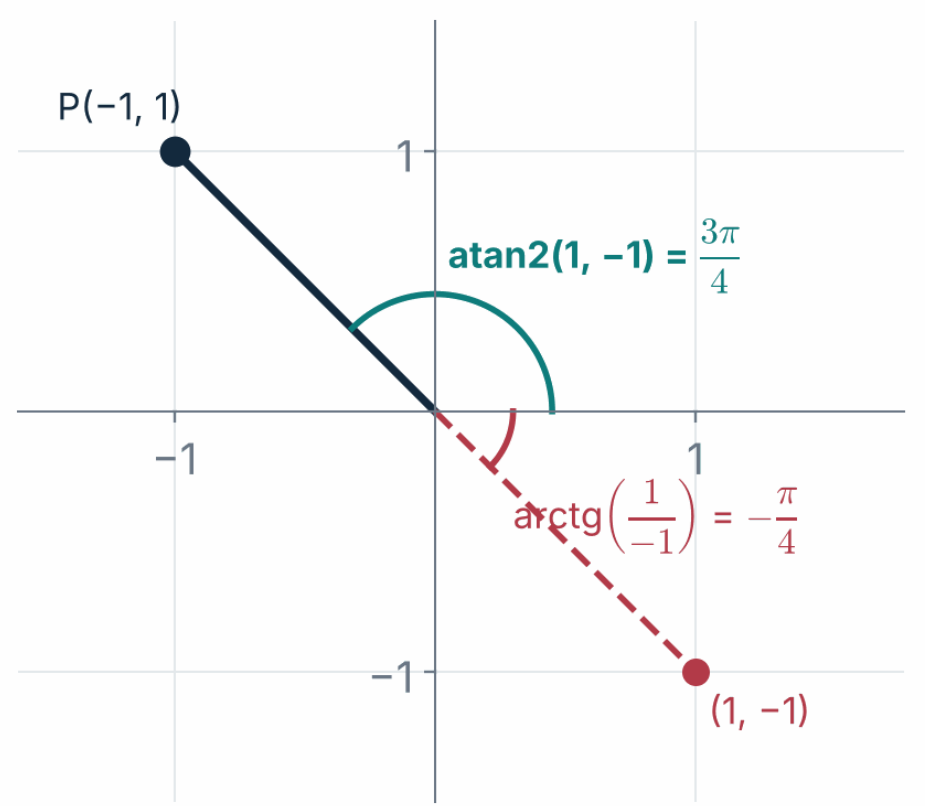
PROBLEMI

Këndi polar i pikës (x, y) nuk mund të gjendet vetëm me arctg $\frac{y}{x}$: pikat $(-1, 1)$ dhe $(1, -1)$ japin të dyja

$$\text{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

ZGJIDHJA

atan2$(y, x) \in (-\pi, \pi]$ merr parasysh shenjat e x dhe y, pra kuadrantin.



NË INFORMATIKË Python: `math.atan2(1, -1)` $= 2{,}356\ldots = \frac{3\pi}{4}$.

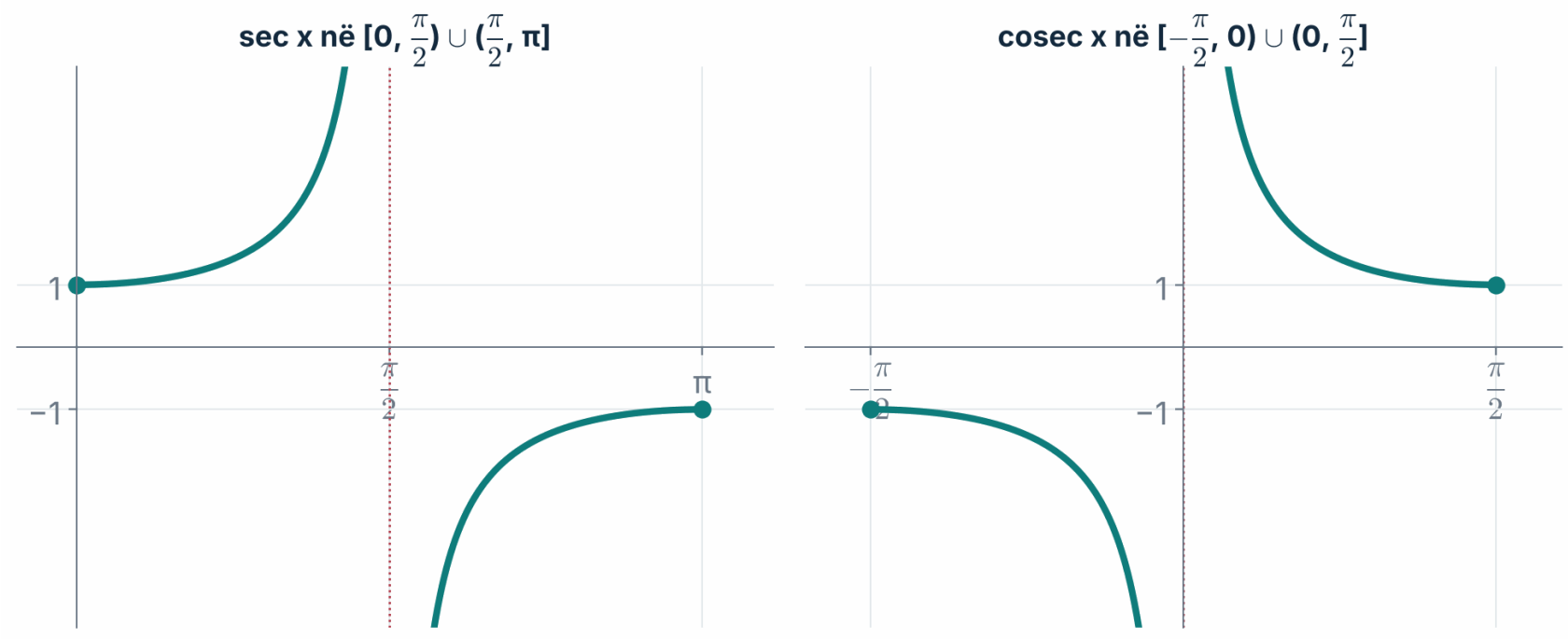
Përdoret në grafikë kompjuterike, robotikë, navigim GPS dhe përpunim sinjalesh.

IV

arcsec dhe arccosec

Funksionet e anasjella të sekantit dhe kosekantit

Ngushtimet bijektive të sec dhe cosec



$\sec : \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \to (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
rritës në secilën pjesë; **bijektiv**.

$\operatorname{cosec} : \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \to (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
zbritës në secilën pjesë; **bijektiv**.

Funksioni arcsec

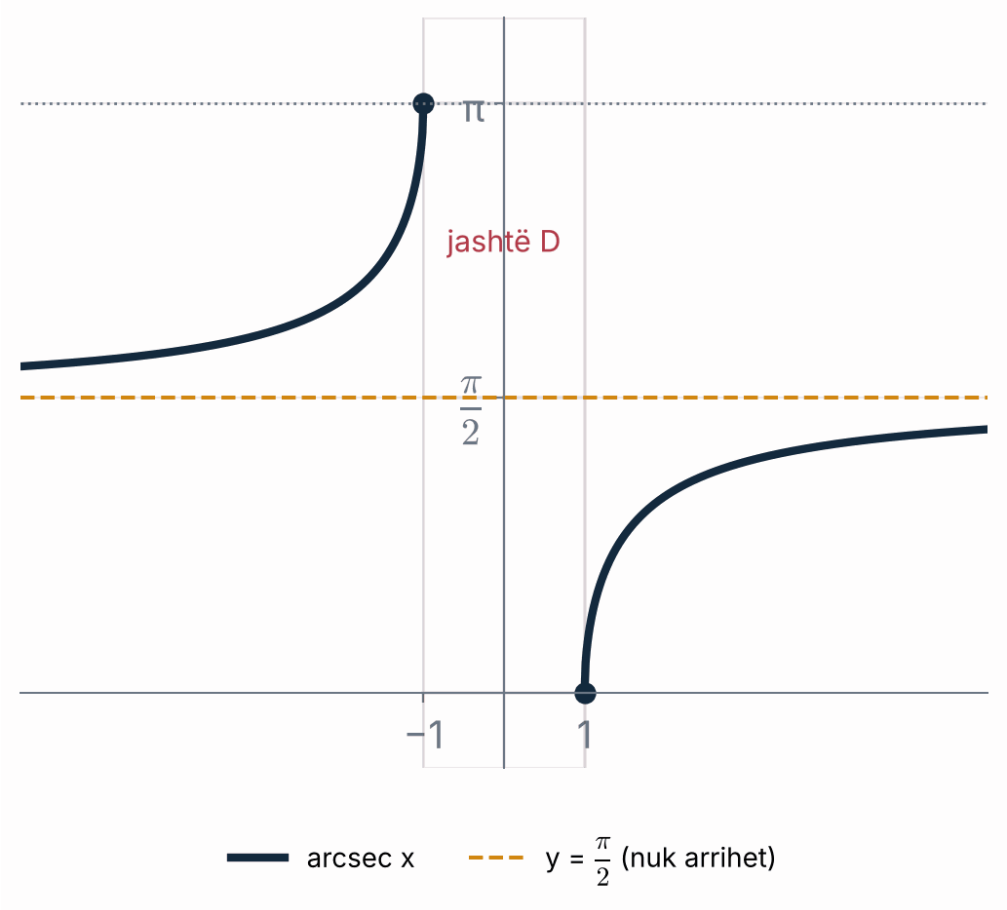
PËRKUFIZIMI

$$\operatorname{arcsec} : (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$y = \operatorname{arcsec} x \iff \sec y = x, \quad y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

VETITË

- $\operatorname{arcsec} x = \arccos \dfrac{1}{x}$ (ushtrimi 6)
- $\operatorname{arcsec} 1 = 0$, $\operatorname{arcsec}(-1) = \pi$; vlera $\dfrac{\pi}{2}$ nuk arrihet
- $\operatorname{arcsec}(-x) = \pi - \operatorname{arcsec} x$



KUJDES Në disa tekste: $V(\operatorname{arcsec}) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$. Ne përdorim $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, që përputhet me $\operatorname{arcsec} x = \arccos \frac{1}{x}$.

Funksioni arccosec

PËRKUFIZIMI

$$\operatorname{arccosec} : (-\infty,-1]\cup[1,+\infty) \to \left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$$

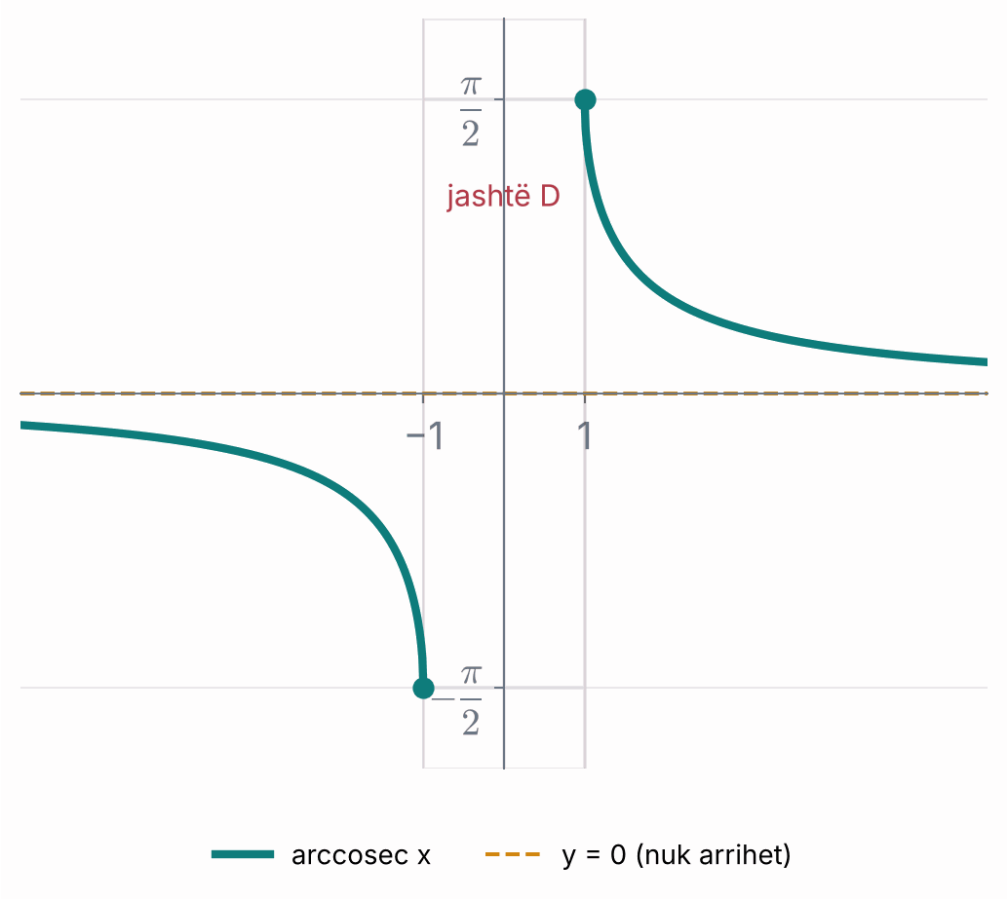
$$y = \operatorname{arccosec} x \iff \operatorname{cosec} y = x,\quad y \in \left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$$

VETITË

- $\operatorname{arccosec} x = \arcsin \dfrac{1}{x}$
- **tek**; $\operatorname{arccosec} 1 = \dfrac{\pi}{2}$, $\operatorname{arccosec}(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$
- zbritës në secilën degë; vlera 0 nuk arrihet

TEOREMË $\operatorname{arcsec} x + \operatorname{arccosec} x = \dfrac{\pi}{2}$ për $|x| \geq 1$.

Rrjedh nga $\arcsin t + \arccos t = \dfrac{\pi}{2}$ me $t = \dfrac{1}{x}$.



V

Përmbledhje dhe ushtrime

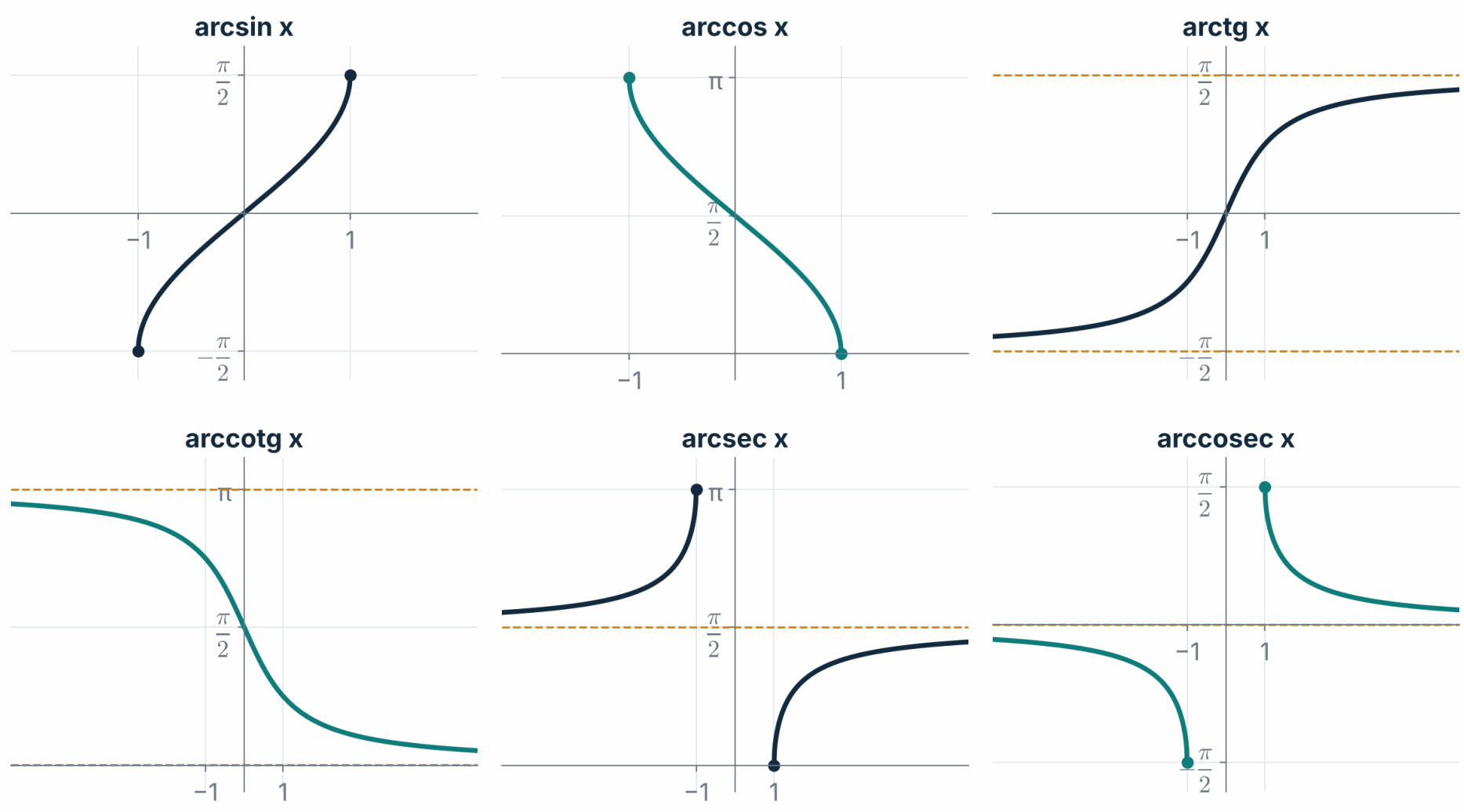
Tabela e plotë, gjashtë grafikët, shembuj të zgjidhur dhe detyra me zgjidhje

Tabela përmbledhëse

Funksioni	D	V	Monotonia	Çiftësia	Formula lidhëse
$\arcsin x$	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	rritës	tek	$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	zbritës	asnjë	$\arccos(-x)=\pi-\arccos x$
$\operatorname{arctg} x$	$\mathbb{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	rritës	tek	$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arccotg} x=\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{arccotg} x$	$\mathbb{R}$	$(0,\pi)$	zbritës	asnjë	$\operatorname{arccotg}(-x)=\pi-\operatorname{arccotg} x$
$\operatorname{arcsec} x$	$\lvert x\rvert\geq 1$	$\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$	rritës në çdo degë	asnjë	$\operatorname{arcsec} x=\arccos\frac{1}{x}$
$\operatorname{arccosec} x$	$\lvert x\rvert\geq 1$	$\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$	zbritës në çdo degë	tek	$\operatorname{arccosec} x=\arcsin\frac{1}{x}$

IDEJA KYÇE Bashkësia e vlerave e çdo “arc” është dega kryesore e funksionit trigonometrik përkatës.

Gjashtë grafikët



Shembuj të zgjidhur

(a) BASHKËSIA E PËRCAKTIMIT

$$f(x) = \arcsin \frac{x-1}{2}$$

$$-1 \le \frac{x-1}{2} \le 1 \Rightarrow -1 \le x \le 3$$

$$D = [-1, 3],\ V = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

(b) BASHKËSIA E PËRCAKTIMIT

$$g(x) = \arccos(x^2 - 1)$$

$$-1 \le x^2 - 1 \le 1 \Rightarrow x^2 \le 2$$

$$D = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}],\ V = [0, \pi]$$

(c) VLERË E SAKTË

$$\cos\left(\arcsin \frac{3}{5}\right)$$

$$\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos\theta \ge 0:$$

$$\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

(d) VLERË E SAKTË

$$\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

(e) PËRBËRJA

$$\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$= -\frac{\pi}{6} \quad (\text{jo } \frac{7\pi}{6}!)$$

(f) PËRBËRJA

$$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = -1$$

$$= -\frac{\pi}{4} \quad (\text{jo } \frac{3\pi}{4}!)$$

Gabime tipike që duhen shmangur

1 $\arcsin x = \dfrac{1}{\sin x}$ (në fakt $\dfrac{1}{\sin x} = \operatorname{cosec} x$)

2 $\arcsin(\sin x) = x$ për çdo x

3 $\arccos(-x) = -\arccos x$

4 $\operatorname{arcsec} x = \dfrac{1}{\arccos x}$ (e sakta: $\arccos \dfrac{1}{x}$)

5 $\arcsin 2$ ose $\arccos(-3)$ “ekzistojnë”

6 $\operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ jep gjithmonë këndin polar

7 Dega kryesore e cos është $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

8 arccotg ka të njëjtën konventë në çdo tekst

Ushtrime për punë të pavarur

1. Gjeni D dhe V për $f(x) = \arcsin(2x - 3)$.
2. Gjeni D për $g(x) = \arccos \dfrac{x+1}{x}$.
3. Llogaritni sin $\left(\arccos\left(-\dfrac{4}{5}\right)\right)$ dhe tg $\left(\arcsin \dfrac{5}{13}\right)$.
4. Llogaritni arccos $\left(\cos \dfrac{5\pi}{3}\right)$ dhe arctg $\left(\operatorname{tg} \dfrac{5\pi}{4}\right)$.
5. Provoni: $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ për $x > 0$.
6. Provoni: $\operatorname{arcsec} x = \arccos \dfrac{1}{x}$ për $|x| \geq 1$.
7. Zgjidhni ekuacionin $\arcsin x = \arccos x$.
8. Gjeni D për $h(x) = \operatorname{arcsec}(x - 2)$.

Zgjidhje: ushtrimet 1–4

USHTRIMI 1

$-1 \le 2x-3 \le 1 \Rightarrow 1 \le x \le 2$.

$D=[1,2]$; meqë $2x-3$ merr të gjitha vlerat në $[-1,1]$, $V=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

USHTRIMI 2

$-1 \le 1+\frac{1}{x} \le 1$. E djathta: $\frac{1}{x} \le 0 \Rightarrow x<0$.

E majta: $\frac{1}{x} \ge -2$; për $x<0$:

$1 \le -2x \Rightarrow x \le -\frac{1}{2}$.

$D=\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$

USHTRIMI 3

$\theta=\arccos\left(-\frac{4}{5}\right) \in [0,\pi] \Rightarrow \sin\theta \ge 0$, pra

$\sin\theta=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}$.

$\varphi=\arcsin\frac{5}{13}$: $\cos\varphi=\frac{12}{13} \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi=\frac{5}{12}$.

USHTRIMI 4

$\cos\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2} \Rightarrow \arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$.

$\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}=1 \Rightarrow \operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$.

Në të dy rastet rezultati nuk është këndi fillestar.

Zgjidhje: ushtrimet 5–8

USHTRIMI 5

$\theta = \operatorname{arctg} x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Atëherë $\frac{\pi}{2} - \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ dhe

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{cotg}\theta = \frac{1}{x},$$

pra $\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \theta$.

USHTRIMI 6

$$y = \operatorname{arcsec} x \iff \sec y = x,\ y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$\iff \cos y = \frac{1}{x},\ y \in [0, \pi] \ \ (\cos y \neq 0 \text{ vetvetiu})$$

$$\iff y = \arccos\frac{1}{x}.$$

USHTRIMI 7

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \arcsin x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

USHTRIMI 8

$|x - 2| \geq 1 \Rightarrow x \leq 1$ ose $x \geq 3$.

$D = (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$