UNIVERSITETI I SHKODRËS «LUIGJ GURAKUQI» · FAKULTETI I SHKENCAVE TË NATYRËS

DEPARTAMENTI I MATEMATIKËS

Funksionet e vazhdueshme

Vazhdueshmëria në pikë, pikat e këputjes, veprimet dhe vetitë e funksioneve të vazhdueshëm në segment

Prof. As. Dr. Siditë Duraj

Analizë Matematike I · Bachelor në Informatikë, viti I · 2026–2027

Objektivat e leksionit

Pas këtij leksioni, studenti do të jetë në gjendje:

1. të formulojë përkufizimin e vazhdueshmërisë në tri mënyra (ε–δ, me vargje, me limit);
2. të gjejë dhe të klasifikojë pikat e këputjes;
3. të përdorë veprimet dhe kompozimin për të provuar vazhdueshmërinë;
4. të zbatojë teoremat e Bolcanos, të vlerës së ndërmjetme dhe të Vajershtrasit;
5. të shkruajë metodën e përgjysmimit dhe të vlerësojë gabimin e saj.

Ku jemi. Leksioni pararendës: **limiti i funksionit**. Sot i shtojmë një kusht të vetëm, *limiti është i barabartë me vlerën*, dhe fitojmë një klasë funksionesh me veti shumë të forta.

Teksti bazë: E. Hoxha, A. Stringa, Analiza Matematike 1, Kreu V, f. 127–153.

Ushtrime: Hoxha–Stringa, Ushtrime të Analizës Matematike 1, Kreu V, §1–2.

Pse ka rëndësi vazhdueshmëria?

Intuita. Një funksion i vazhdueshëm vizatohet «pa e ngritur lapsin nga letra»: ndryshime të vogla të x-it japin ndryshime të vogla të $f(x)$.

Historia. Ideja është e vjetër (Njutoni), por përkufizimi i saktë u dha nga B. Bolcano (1817) dhe A. Koshi (1821), dhe u bë plotësisht rigoroz me K. Vajershtrasin (1870).

Në praktikë, falë vazhdueshmërisë:

- limiti llogaritet thjesht me zëvendësim;
- mund të provojmë që një ekuacion *ka* zgjidhje, pa e zgjidhur;
- kemi garanci që një problem optimizimi ka maksimum.

Në informatikë.

- Metoda e përgjysmimit (*bisection*) për rrënjët e ekuacioneve bazohet te teorema e Bolcanos.
- Kur një sensor ose një program jep vlera të «pandërprera», ndryshimet e vogla të hyrjes nuk prishin daljen: kjo është vazhdueshmëria.
- Një kërcim (këputje) në një prag është vendim binar, p.sh. klasifikimi *po/jo*.

Përkufizimi sipas Koshit

Le të jetë $f\colon D(f) \to \mathbb{R}$ dhe $a \in D(f)$.

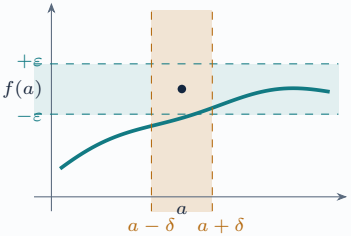
Përkufizim 1.1 (Koshi). Funksioni f quhet **i vazhdueshëm në pikën** a në qoftë se

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D(f): \quad |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Krahaso me limitin.

- Te limiti: $0 < |x - a| < \delta$ dhe $|f(x) - L| < \varepsilon$.
- Te vazhdueshmëria: $|x - a| < \delta$ dhe $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Pika a nuk përjashtohet më, dhe vendin e L e zë $f(a)$.



Tri përkufizime ekuivalente

Përkufizim 1.2 (me zona rrethuese). Për çdo zonë rrethuese $V_\varepsilon(f(a))$ gjendet një zonë $V_\delta(a)$ e tillë që

$$f\big(D(f)\cap V_\delta(a)\big)\subseteq V_\varepsilon(f(a)).$$

Përkufizim 1.3 (Hajne, me vargje). Për **çdo** varg (x_n) me $x_n \in D(f)$ dhe $x_n \to a$, vargu $f(x_n)\to f(a)$.

Teoremë (Vërejtja 1.4). Nëse a është pikë limite e $D(f)$, atëherë f është e vazhdueshme në a atëherë dhe vetëm atëherë kur plotësohen **tri kushte**:

1. $f(a)$ ekziston, pra $a\in D(f)$;
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ekziston dhe është numër i fundëm;
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Pika të izoluara. Nëse $a \in D(f)$ është pikë e izoluar e $D(f)$, funksioni është gjithmonë i vazhdueshëm në a. Prandaj më tej shqyrtojmë vetëm pikat limite.

Shtesat: një formulim tjetër

Përkufizim 1.5. $\Delta x = x - a$ quhet **shtesë e argumentit**, ndërsa

$$\Delta f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$$

quhet **shtesë e funksionit** në pikën a.

Teoremë 1.6. f është e vazhdueshme në a atëherë dhe vetëm atëherë kur

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(a) = 0.$$

Shembull: $f(x) = x^2$.

$$\Delta f(a) = (a + \Delta x)^2 - a^2 = 2a\,\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Kur $\Delta x \to 0$, të dy termat shkojnë në 0, pra $\Delta f(a) \to 0$: funksioni x^2 është i vazhdueshëm në çdo pikë $a \in \mathbb{R}$.

Në informatikë. Shtesa Δf është «gabimi në dalje» kur hyrja ndryshon me Δx. Vazhdueshmëria do të thotë: gabimi i vogël në hyrje jep gabim të vogël në dalje.

Funksionet bazë janë të vazhdueshëm

Shembulli 1.8.

1. $f(x) = k$ (konstante): $\lim_{x \to a} k = k = f(a)$.
2. $f(x) = x$: $\lim_{x \to a} x = a = f(a)$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ në $\mathbb{R} \setminus \{0\}$: $\lim_{x \to a} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a} = f(a)$, $a \neq 0$.
4. $\sin x$ dhe $\cos x$ janë të vazhdueshëm në $\mathbb{R}$.

Vërtetim për $\sin x$ (me ε–δ):

$$|\sin x - \sin a| = 2\left|\cos\frac{x+a}{2}\right| \cdot \left|\sin\frac{x-a}{2}\right|$$

$$\leq 2 \cdot 1 \cdot \frac{|x-a|}{2} = |x-a|,$$

sepse $|\sin t| \leq |t|$.

Pra mjafton $\delta = \varepsilon$: nga $|x-a| < \delta$ del $|\sin x - \sin a| < \varepsilon$. ■

Për $\cos x$ *veprohet njësoj me*

$\cos x - \cos a = -2 \sin \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}$.

Ushtrim i zgjidhur: vazhdueshmëria e $\sqrt{x}$

Hoxha–Stringa, Ushtrime, Kreu V, 1.1

Detyra. Me përkufizimin e Koshit, tregoni që $f(x) = \sqrt{x}$ është e vazhdueshme në $D(f) = [0, +\infty)$.

Rasti $a > 0$**.** Racionalizojmë:

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \leq \frac{|x - a|}{\sqrt{a}}.$$

Marrim $\delta = \varepsilon\sqrt{a}$. Atëherë nga $|x - a| < \delta$:

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| < \frac{\varepsilon\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \varepsilon.$$

Rasti $a = 0$ (skaji i majtë i domenit):

$$|\sqrt{x} - 0| < \varepsilon \iff x < \varepsilon^2,$$

pra mjafton $\delta = \varepsilon^2$. Kemi vazhdueshmëri nga e djathta, e vetmja që ka kuptim në 0.

Përfundimi. $\sqrt{x}$ është e vazhdueshme në $[0, +\infty)$.

Vazhdueshmëria e njëanshme

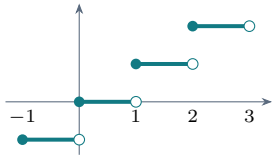
Përkufizim 1.10. f është e vazhdueshme **nga e majta** (nga e djathta) në a nëse $f(a)$ ekziston, limiti i majtë (i djathtë) ekziston dhe është i fundëm, dhe

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a) \qquad \Big(\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)\Big).$$

Teoremë 1.11. Le të jetë a pikë limite e $D(f)$ nga të dyja anët. Atëherë f është e vazhdueshme në a $\iff$ f është e vazhdueshme në a nga e majta **dhe** nga e djathta.

Në një skaj të domenit (p.sh. 0 për $\sqrt{x}$) shqyrtohet vetëm ana që ekziston.

Shembull: pjesa e plotë.



Për $E(x) = [x]$, në çdo numër të plotë k: $\lim_{x\to k^-} [x] = k-1$ dhe $\lim_{x\to k^+} [x] = k = [k]$. Funksioni është i vazhdueshëm nga e djathta, por jo nga e majta.

Ushtrim i zgjidhur: vazhdueshmëria e x^2 me ε–δ

Detyra. Tregoni me përkufizimin e Koshit që $f(x) = x^2$ është e vazhdueshme në çdo $a \in \mathbb{R}$.

Hapi 1. Shkruajmë shmangien si prodhim:

$$|x^2 - a^2| = |x - a| \cdot |x + a|.$$

Hapi 2. Kufizojmë faktorin $|x + a|$. Nëse $|x - a| < 1$, atëherë

$$|x + a| \le |x - a| + 2|a| < 1 + 2|a|.$$

Hapi 3. Për çdo $\varepsilon > 0$ zgjedhim

$$\delta = \min\left\{1,\ \frac{\varepsilon}{1 + 2|a|}\right\}.$$

Nga $|x - a| < \delta$ rrjedh

$$|x^2 - a^2| < \delta\,(1 + 2|a|) \le \varepsilon.$$

Përfundimi. δ varet nga ε dhe nga pika a, por **jo** nga x.

Pikat e këputjes dhe klasifikimi i tyre

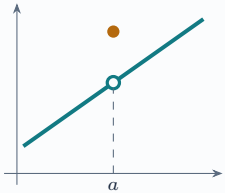
Përkufizim 2.1. Pika a (pikë limite e $D(f)$) quhet **pikë këputjeje** e f nëse f nuk është e vazhdueshme në a, pra nëse të paktën njëri nga tri kushtet nuk plotësohet.

Lloji	Kushti	Shembull
E mënjanueshme (Përk. 2.2)	$\lim_{x\to a} f(x) = L$ ekziston dhe është i fundëm, por $f(a)$ nuk ekziston ose $f(a) \neq L$	$\dfrac{x^2-1}{x-1}$ në $a=1$
E llojit të parë (kërcim)	Limitet e njëanshme ekzistojnë, janë të fundme, por **të ndryshme**	$\operatorname{sgn} x$ në $a=0$
E llojit të dytë	Të paktën njëri limit i njëanshëm **nuk ekziston ose është i pafundëm**	$\dfrac{1}{x}$, $\sin\dfrac{1}{x}$ në $a=0$

Llojet e parë dhe të dytë së bashku quhen pika këputjeje të pamënjanueshme ose thelbësore (Përkufizimi 2.3).

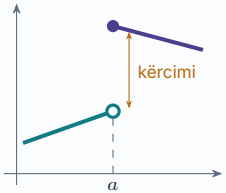
Si duken në grafik

E mënjanueshme



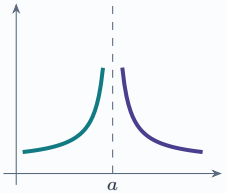
Limiti ekziston, por ndryshon nga $f(a)$ (ose $f(a)$ mungon). «Riparohet» duke ripërcaktuar $f(a) = L$.

Lloji i parë (kërcim)



Dy limite të njëanshme të fundme dhe të ndryshme. Nuk riparohet.

Lloji i dytë



Të paktën një limit i njëanshëm i pafundëm ose që nuk ekziston (p.sh. lëkundje si te $\sin \frac{1}{x}$).

Shembuj nga teksti

Hoxha–Stringa, Analiza Matematike 1, Shembulli 2.4, f. 132–134

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$: $\lim\limits_{x \to 0^{\pm}} \dfrac{1}{x} = \pm\infty$. Pika 0 është e **llojit të dytë**.
2. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$: nuk është e përcaktuar në 0, por $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Pika 0 është **e mënjanueshme**.
3. $\operatorname{sgn} x$: limitet e njëanshme -1 dhe 1. Pika 0 është e **llojit të parë**.
4. Funksioni i Dirihlesë nuk është i vazhdueshëm në **asnjë** pikë (dy vargje: racionalë dhe irracionalë).
5. $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, pra 0 është e mënjanueshme. Funksioni

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

është i vazhdueshëm në 0: **zgjatim i vazhdueshëm**.

Algoritmi i studimit të një pike

0. Gjej $D(f)$. Nëse a është pikë e izoluar, f është e vazhdueshme në a.

↓

1. Gjej $L_- = \lim_{x \to a^-} f(x)$ dhe $L_+ = \lim_{x \to a^+} f(x)$.

↓

2. A janë të dy të fundëm?

po ↓

3. A është $L_- = L_+$?

po ↓

4. A ekziston $f(a)$ dhe $f(a) = L_- = L_+$?

2: jo $\to$ pikë e **llojit të dytë**.

3: jo $\to$ pikë e **llojit të parë** (kërcim me lartësi $|L_+ - L_-|$).

4: jo $\to$ pikë e **mënjanueshme**.

4: po $\to$ f është **e vazhdueshme** në a.

Kujdes. Te funksionet e përcaktuara me copa, pikat që duhen kontrolluar janë pikat **e bashkimit** të copave dhe pikat ku funksioni nuk është i përcaktuar.

Ushtrim i zgjidhur: një funksion racional

Hoxha–Stringa, Ushtrime, Kreu V, 1.2

Detyra. Gjeni dhe klasifikoni pikat e këputjes së $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 3}{x^2 - 1}$.

Hapi 1. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1,\, 1\}$. Si raport polinomesh, f është e vazhdueshme në $D(f)$. Kontrollojmë vetëm $x = \pm 1$.

Hapi 2: $x = 1$. Numëruesi: $1 + 2 - 3 = 0$. Faktorizojmë:

$$x^3 + 2x^2 - 3 = (x - 1)(x^2 + 3x + 3),$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x^2 + 3x + 3)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{7}{2}.$$

Pika $x = 1$ është e **mënjanueshme**.

Hapi 3: $x = -1$. Numëruesi $\to -2$ dhe $x - 1 \to -2$, pra pranë -1 kemi $f(x) \approx \dfrac{1}{x + 1}$:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty.$$

Pika $x = -1$ është e **llojit të dytë**.

Përfundimi. $x = 1$: e mënjanueshme, f zgjatet me $f(1) = \dfrac{7}{2}$.
$x = -1$: e llojit të dytë, asimptotë vertikale.

Ushtrim i zgjidhur: funksion me copa

Hoxha–Stringa, Ushtrime, Kreu V, 1.3

Detyra. Studioni vazhdueshmërinë në $x = 1$ dhe $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - x - 1}{x - 1}, & x < 1 \\ 3x - 1, & 1 \le x \le 2 \\ 5, & x > 2. \end{cases}$$

Në $x = 2$**:** $\lim_{x \to 2^-} (3x - 1) = 5$, $\lim_{x \to 2^+} 5 = 5$ dhe $f(2) = 5$: **e vazhdueshme**.

Në $x = 1$**:** $f(1) = 3 \cdot 1 - 1 = 2$.

$$2x^2 - x - 1 = (x - 1)(2x + 1),$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{(x - 1)(2x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} (2x + 1) = 3,$$

$$\lim_{x \to 1^+} (3x - 1) = 2 = f(1).$$

Pika $x = 1$ është e **llojit të parë** (kërcim 1); f është e vazhdueshme nga e djathta.

Shënim për tekstin. Në libër faktorizimi jepet $(x - 1)(2x - 1)$, me limit të majtë 1. Faktorizimi i saktë jep $(x - 1)(2x + 1)$ dhe limitin 3; përfundimi për llojin e pikës nuk ndryshon.

Ushtrim i zgjidhur: gjetja e parametrave

Hoxha–Stringa, Ushtrime, Kreu V, 1.4

Detyra. Gjeni a dhe b që f të jetë e vazhdueshme në $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} + a, & x < 0 \\ x + b, & 0 \le x \le 1 \\ 2x^2 + 2, & x > 1. \end{cases}$$

Brenda secilit interval f është funksion elementar, pra i vazhdueshëm. Mbeten pikat e bashkimit 0 dhe 1.

Në $x = 0$: $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\dfrac{\sin x}{x} + a \right) = 1 + a$, $\lim\limits_{x \to 0^+} (x + b) = b = f(0)$. Kushti: $1 + a = b$.

Në $x = 1$: $\lim\limits_{x \to 1^-} (x + b) = 1 + b = f(1)$, $\lim\limits_{x \to 1^+} (2x^2 + 2) = 4$. Kushti: $1 + b = 4$.

Përfundimi.

$$\begin{cases} 1 + a = b \\ 1 + b = 4 \end{cases} \implies b = 3, \quad a = 2.$$

Veprimet dhe funksionet elementare

Teoremë 3.1. Nëse f dhe g janë të vazhdueshëm në a, atëherë janë të vazhdueshëm në a edhe

$$kf, \quad f \pm g, \quad f \cdot g, \quad |f|, \quad \frac{f}{g} \ \big(g(a) \neq 0\big).$$

Vërtetim (për prodhimin): sipas teoremës për limitin e prodhimit,

$$\lim_{x \to a} (fg)(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = f(a)\, g(a).$$

Pasojat (Shembulli 3.1):

- çdo polinom është i vazhdueshëm në $\mathbb{R}$;
- çdo funksion racional $\dfrac{P}{Q}$ është i vazhdueshëm në bashkësinë e përcaktimit;
- $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ është i vazhdueshëm në $\mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \right\}$;
- nëse $f \geq 0$ është e vazhdueshme, edhe $\sqrt{f}$ është e vazhdueshme.

Rregulli i punës. Të gjithë **funksionet elementarë** janë të vazhdueshëm në bashkësinë e tyre të përcaktimit.

Funksioni i përbërë

Teoremë 3.2. Nëse g është e vazhdueshme në a dhe f është e vazhdueshme në $g(a)$, atëherë $f \circ g$ është e vazhdueshme në a.

Pasojë e rëndësishme:

$$\lim_{x \to a} f\big(g(x)\big) = f\Big(\lim_{x \to a} g(x)\Big).$$

Te funksionet e vazhdueshëm, *shenja e limitit futet brenda shenjës së funksionit*.

Shembulli 3.4. $h(x) = \sin \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ është e vazhdueshme në $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$: përbërje e $\sin y$ me një funksion racional.

Lidhja me leksionin e limitit. Te limitet e shquara:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \ln\Big(\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}\Big) = \ln e = 1.$$

Për $x > -1$, $x \neq 0$ vlen $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$; vazhdueshmëria e $\ln$ në e (Teorema 3.2) e justifikon hapin.

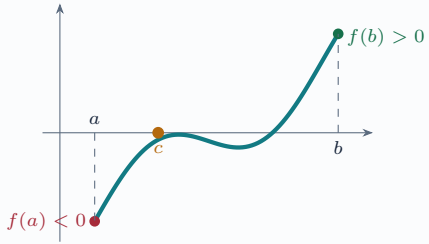
Teorema e Bolcanos

Përkufizim. f është e vazhdueshme në segmentin $[a, b]$ nëse është e vazhdueshme në çdo pikë të (a, b), nga e djathta në a dhe nga e majta në b.

Teoremë 4.1 (Bolcano). Nëse f është e vazhdueshme në $[a, b]$ dhe $f(a) \cdot f(b) < 0$, atëherë ekziston të paktën një pikë $c \in (a, b)$ e tillë që

$$f(c) = 0.$$

Gjeometrikisht: një vijë e pandërprerë që kalon nga ana poshtë boshtit Ox në anën sipër tij, e pret boshtin të paktën një herë.



Vërejtja 4.2. Teorema garanton *ekzistencën* e të paktën një rrënje; mund të ketë edhe më shumë.

Vërtetimi me përgjysmim: teorema bëhet algoritëm

Një vërtetim tjetër nga ai i librit (me $\sup A$), që lidhet drejtpërdrejt me Temën 2: vargjet.

Le të jetë $f(a) < 0 < f(b)$. Vendosim $a_0 = a$, $b_0 = b$.

1. Marrim mesin $m = \dfrac{a_n + b_n}{2}$. Nëse $f(m) = 0$, mbaruam.
2. Nëse $f(m) < 0$: $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [m, b_n]$; përndryshe: $[a_n, m]$.
3. Në çdo hap: $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ dhe $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$.

(a_n) është rritës, (b_n) zbritës, të dy të kufizuar: sipas teoremës së Vajershtrasit për vargjet monotone, konvergjojnë, dhe në të njëjtën pikë c, sepse $b_n - a_n \to 0$.

Nga vazhdueshmëria (Hajne):

$$f(a_n) \to f(c) \;\Rightarrow\; f(c) \le 0,$$

$$f(b_n) \to f(c) \;\Rightarrow\; f(c) \ge 0.$$

Pra $f(c) = 0$. ■

Në informatikë. Vërtetimi është vetë **algoritmi**: pas n hapash rrënja ndodhet në një interval me gjatësi $\dfrac{b-a}{2^n}$, dhe mesi i tij e përafron atë me gabim jo më të madh se $\dfrac{b-a}{2^{n+1}}$.

Metoda e përgjysmimit në praktikë

Hoxha–Stringa, Ushtrime, Kreu V, 2.10 a: ekuacioni $x^4 + x - 3 = 0$

```
def pergjysmim(f, a, b, eps, n_max=100):
    # kushti i Bolcanos
    assert f(a) * f(b) < 0
    n = 0
    while b - a > eps and n < n_max:
        n += 1
        m = (a + b) / 2
        if f(a) * f(m) <= 0:
            b = m       # rrënja në [a, m]
        else:
            a = m       # rrënja në [m, b]
    return (a + b) / 2

f = lambda x: x**4 + x - 3
print(pergjysmim(f, 1, 2, 1e-6))
# 1.16403532...  (pas 20 hapash)
```

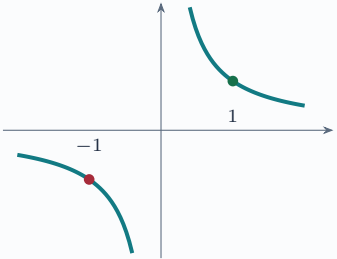
n	a_n	b_n	m	$f(m)$
1	1,0000	2,0000	1,5000	$+3{,}5625$
2	1,0000	1,5000	1,2500	$+0{,}6914$
3	1,0000	1,2500	1,1250	$-0{,}2732$
4	1,1250	1,2500	1,1875	$+0{,}1760$
5	1,1250	1,1875	1,1563	$-0{,}0564$
6	1,1563	1,1875	1,1719	$+0{,}0578$
7	1,1563	1,1719	1,1641	$+0{,}0002$

Gjatësi $< 10^{-6}$: $n = 20$ hapa, sepse $\dfrac{1}{2^{20}} < 10^{-6} < \dfrac{1}{2^{19}}$; për gabimin e mesit mjaftojnë 19. Rrënja (e vetme, f rritëse): $c \approx 1{,}1640351$.

Shënim për tekstin. Në libër jepet segmenti $[0, 1]$, por $f(0) = -3$ dhe $f(1) = -1$: nuk ka ndryshim shenje dhe as rrënjë. Rrënja pozitive ndodhet në $[1, 2]$.

Kur kushtet nuk plotësohen

Hoxha–Stringa, Analiza Matematike 1, Vërejtja 4.4, f. 139



$f(x) = \dfrac{1}{x}$ në $[-1, 1]$: $f(-1) \cdot f(1) < 0$, por $f(x) \neq 0$ kudo. Teorema nuk zbatohet, sepse f **nuk është e vazhdueshme** në 0.

Pohimi i anasjellë nuk vlen. Nëse $f(a) \cdot f(b) > 0$, mund të ketë prapësepraprë rrënjë në (a, b), p.sh. $x^2 - 1$ në $[-2, 2]$ ka dy rrënjë.

Në informatikë: pse ka rëndësi kushti. Një program që përdor përgjysmimin duhet të kontrollojë **para nisjes** që $f(a) \cdot f(b) < 0$ (rreshti `assert` në kod). Përndryshe kthen një «rrënjë» që nuk ekziston, si te $\dfrac{1}{x}$, ku algoritmi do të afrohej te pika e këputjes 0.

Teorema e vlerave të ndërmjetme

Teoremë 4.3 (Koshi). Nëse f është e vazhdueshme në $[a,b]$ dhe k është një numër midis $f(\alpha)$ dhe $f(\beta)$ ($\alpha,\beta\in[a,b]$), atëherë ekziston c midis α dhe β me

$$f(c)=k.$$

Ideja e vërtetimit: zbatojmë teoremën e Bolcanos për $F(x)=f(x)-k$.

Ideja. Duke kaluar nga një vlerë në tjetrën, funksioni i vazhdueshëm **kalon nëpër të gjitha vlerat e ndërmjetme**.

Zbatim 1: ekziston $\sqrt{2}$ (Ushtrimi 2.9). $f(x)=x^2$ është e vazhdueshme në $[1,2]$, $f(1)=1<2<4=f(2)$. Pra ekziston $c\in(1,2)$ me $c^2=2$.

Zbatim 2: polinomet e shkallës tek. Për $P(x)=a_nx^n+\dots$ me n tek dhe $a_n\neq 0$, limitet në $-\infty$ dhe $+\infty$ janë pafundësi me shenja të kundërta, pra P merr vlera negative dhe pozitive. Sipas Bolcanos, **çdo polinom real i shkallës tek ka të paktën një rrënjë reale**.

Teoremat e Vajershtrasit

Teoremë 4.7 (Vajershtrasi I). Nëse f është e vazhdueshme në $[a, b]$, atëherë f është **e kufizuar** në $[a, b]$.

Teoremë 4.9 (Vajershtrasi II). Nëse f është e vazhdueshme në $[a, b]$, atëherë f **merr** në $[a, b]$ vlerën më të madhe M dhe vlerën më të vogël m.

Në informatikë. Kur kërkojmë minimumin e kostos ose maksimumin e saktësisë së një modeli në një interval të mbyllur, teorema garanton që **zgjidhja ekziston**, prandaj ka kuptim ta kërkojmë.

Çdo kusht është i nevojshëm (Vërejtja 4.8):

Funksioni	Çfarë mungon
x në $[0, +\infty)$	bashkësia nuk është e kufizuar
$\dfrac{1}{x}$ në $(0, 1]$	bashkësia nuk është e mbyllur
$\dfrac{1}{x}$ në $[0, 1]$, me $f(0) = 1$	f nuk është e vazhdueshme në 0

Në të tri rastet funksioni **nuk** është i kufizuar në bashkësinë e dhënë.

Gabime tipike

1. «f ka limit në a, pra është e vazhdueshme.» Duhet edhe $f(a)$ dhe barazimi me limitin: $\dfrac{\sin x}{x}$ ka limit në 0, por nuk është e përcaktuar atje.
2. «$\dfrac{1}{x}$ nuk është e vazhdueshme.» Është e vazhdueshme në **bashkësinë e saj të përcaktimit** $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; pika 0 është pikë këputjeje.
3. Te funksionet me copa kontrollohet vetëm njëri limit i njëanshëm.
4. «$f(a) \cdot f(b) > 0$, pra nuk ka rrënjë në (a, b).» Teorema e Bolcanos nuk thotë asgjë për këtë rast.
5. Zbatohet teorema e Bolcanos pa kontrolluar vazhdueshmërinë në **të gjithë** segmentin.
6. Teorema e Vajershtrasit zbatohet në intervale të hapura ose të pakufizuara.

Ushtrime për punë të pavarur

Numrat i referohen librit Ushtrime të Analizës Matematike 1, Kreu V.

A. Bazë

1.21 Studioni vazhdueshmërinë në pikën e dhënë: a), b), e), i), j), k), m).

1.22 Gjeni dhe klasifikoni pikat e këputjes: a), c).

B. Teknikë

1.23 Studioni vazhdueshmërinë: a), c), d).

1.24 Gjeni konstanten a: a), b).

1.25 Gjeni a: a), b).

1.26 Për cilën vlerë të k?

C. Thellim

2.4 Pse ekuacioni $f(x) = 0$ mund të mos ketë zgjidhje? (shembull grafik)

2.5 A zbatohet teorema e Vajershtrasit për $\frac{1}{x}$ në a), b), c)?

2.10 b), c) me teoremën e vlerave të ndërmjetme.

Python: zgjidhni 2.10 c) me përgjysmim dhe gabim $< 10^{-6}$.

Zgjidhje orientuese

A. Bazë

1.21 a) e vazhdueshme; b) lloji i parë (-1 dhe 1); e) $x = \pm 1$ të mënjanueshme, limiti 4; i) e mënjanueshme, limiti $\dfrac{1}{6}$; j) e vazhdueshme; k) lloji i dytë; m) e mënjanueshme: limiti $\dfrac{1}{2} \neq 0 = f(0)$.

1.22 a) e vazhdueshme në $\mathbb{R}$; c) $x = 2$ e mënjanueshme (limiti $\dfrac{5}{3}$), $x = -1$ e llojit të dytë.

B. Teknikë

1.23 a) $x = 0$: kërcim (1 dhe 0), e vazhdueshme nga e majta; $x = 3$: kërcim (18 dhe 2), e vazhdueshme nga e djathta. c) e vazhdueshme në $\mathbb{R}$ (të dy limitet 2). d) lloji i parë: $-\dfrac{\pi}{2}$ dhe $\dfrac{\pi}{2}$.

1.24 a) $a = -1$; b) $a = -1$.

1.25 a) $a = 3$; b) $a = -\dfrac{5}{2}$.

1.26 a) $k = 4$.

C. Thellim

2.4 P.sh. $f(1) = -2$, por $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1$ dhe f rritet deri në $f(3) = 2$: kërcimi në 1 «kapërcen» vlerën 0.

2.5 a) po, $f([1,4]) = \left[\dfrac{1}{4}, 1\right]$; b) jo, f nuk është e vazhdueshme në 0 dhe nuk është e kufizuar; c) jo, $[1, +\infty)$ nuk është e kufizuar; maksimumi 1 merret, minimumi jo.

2.10 b) $g = \sqrt[3]{x} + x - 1$: $g(0) = -1$, $g(1) = 1$; c) $g = \cos x - x$: $g(0) = 1$, $g(1) \approx -0{,}46$. Rrënja: $c \approx 0{,}739085$.

Kontroll përfundimtar

1. Për cilën vlerë të k është e vazhdueshme në $\mathbb{R}$ funksioni $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ për $x \neq 2$, $f(2) = k$?
2. Çfarë lloji pike këputjeje është $x = 0$ për $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$?
3. A ka ekuacioni $x^3 - 3x + 1 = 0$ rrënjë në $[0, 1]$? Argumentoni.
4. Sa hapa përgjysmimi duhen në $[0, 1]$ që intervali që përmban rrënjën të ketë gjatësi më të vogël se 10^{-6}?
5. A merr funksioni $f(x) = \dfrac{1}{x}$ vlerën më të madhe në $(0, 1]$? Po vlerën më të vogël?

Përgjigjet. (1) $k = 4$. (2) Lloji i dytë: majtas 0, djathtas $+\infty$. (3) Po: $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = -1 < 0$. (4) $n = 20$, sepse $\dfrac{1}{2^{20}} < 10^{-6} < \dfrac{1}{2^{19}}$ (për gabimin e mesit mjaftojnë 19). (5) Vlerën më të vogël po, $f(1) = 1$; vlerën më të madhe jo, sepse f nuk është e kufizuar.

Kontroll konceptual: e vërtetë apo e gabuar?

1. $\dfrac{1}{x}$ është e vazhdueshme në bashkësinë e saj të përcaktimit.
2. Ekzistenca e $\lim_{x \to a} f(x)$ mjafton për vazhdueshmëri në a.
3. Teorema e Bolcanos garanton një rrënjë të vetme.
4. Nëse $f(a) \cdot f(b) > 0$, ekuacioni $f(x) = 0$ mund të ketë rrënjë në (a, b).
5. Çdo funksion i vazhdueshëm në $(0, 1)$ është i kufizuar.
6. $[x]$ është e vazhdueshme nga e djathta në numrat e plotë.
7. Te një këputje e mënjanueshme, limiti i fundëm ekziston.
8. $\dfrac{f}{g}$ është e vazhdueshme në a kur f, g janë të vazhdueshëm në a dhe $g(a) \neq 0$.
9. Në $[a, b]$, një funksion i vazhdueshëm merr minimumin dhe maksimumin.
10. Pas n përgjysmimeve, gabimi i mesit nuk e kalon $\dfrac{b-a}{2^{n+1}}$.

Përgjigjet. E vërtetë: 1, 4, 6, 7, 8, 9, 10. E gabuar: 2 (duhet $a \in D(f)$ dhe limiti $= f(a)$), 3 (vetëm *të paktën* një), 5 (p.sh. $\dfrac{1}{x}$).

Përmbledhje

Vazhdueshmëria në pikë. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$: tri kushte. Ekuivalent: ε–δ, vargje, $\Delta f \to 0$.

Pikat e këputjes. E mënjanueshme · Iloji i parë (kërcim) · Iloji i dytë.

Veprimet. Shuma, prodhimi, herësi, kompozimi ruajnë vazhdueshmërinë; funksionet elementarë janë të vazhdueshëm në domenin e tyre.

Në segmentin $[a, b]$. Bolcano: ndryshim shenje $\Rightarrow$ rrënjë.
Vlerat e ndërmjetme: merren të gjitha.
Vajershtras: i kufizuar, merr m dhe M.

Në informatikë. Përgjysmimi: intervali $\frac{b-a}{2^n}$, gabimi i mesit $\leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$; rreth $3{,}3$ hapa për çdo shifër dhjetore.

Në platformë:
`s-duraj-informatike.netlify.app`
Leksioni pasardhës: derivati i funksionit.