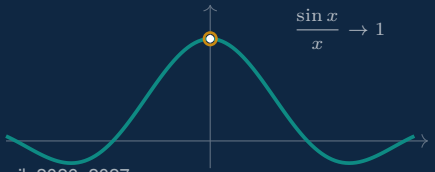
UNIVERSITETI I SHKODRËS „LUIGJ GURAKUQI”
Fakulteti i Shkencave të Natyrës · Departamenti i Matematikës

Limiti i funksionit (II)

Vetitë, veprimet, format e pacaktuara
dhe limitet e shquara



Prof. As. Dr. Siditë Duraj

Analizë Matematike I · Bachelor në Informatikë, viti I · Viti akademik 2026–2027

Ku jemi dhe ku po shkojmë

Pjesa I (leksioni i kaluar)

- ideja intuitive e limitit
- përkufizimi i Hajnes (me vargje)
- përkufizimi i Koshiut (ε–δ)
- limitet e njëanshme, limitet në pafundësi
- kompjuteri dhe $h \to 0$

Pjesa II (sot)

1. vetitë e limitit
2. veprimet me limite
3. format e pacaktuara dhe teknikat
4. teorema e shtrëngimit
5. limitet e shquara: $\dfrac{\sin x}{x}$ dhe e
6. madhësitë pambarimisht të vogla

Pyetja e leksionit. Përkufizimi tregon *çfarë* është limiti. Sot mësojmë *si llogaritet* ai pa përdorur ε dhe δ çdo herë.

Objektivat e leksionit

Në përfundim të leksionit studenti duhet të jetë në gjendje:

1. të formulojë dhe të zbatojë vetitë e limitit (njësia, kufizueshmëria lokale, ruajtja e shenjës);
2. të llogarisë limite me rregullat e veprimeve dhe të njohë kur ato nuk zbatohen;
3. të dallojë shtatë format e pacaktuara dhe të zgjedhë teknikën e duhur;
4. të zbatojë teoremën e shtrëngimit;
5. të përdorë limitet e shquara $\frac{\sin x}{x} \to 1$, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \to e$ dhe pasojat e tyre;
6. të krahasojë madhësitë pambarimisht të vogla dhe të përdorë ekuivalencat.

Literatura: L. Mukli, V. Muka, O. Hysa, *Matematika 1*; E. Hoxha, A. Stringa, *Ushtrime të Analizës Matematike 1*, Kreu IV, §2–3 dhe Kreu V, §3.

Marrëveshje shënimi

Gjatë gjithë leksionit:

- $f\colon D \to \mathbb{R}$ dhe a është **pikë limite** e D (mund të jetë edhe $\pm\infty$);
- **fqinjësi e shpuar** e a: $\dot{U}_\delta(a) = (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$;
- për $a = +\infty$ fqinjësia është $(N, +\infty)$, për $a = -\infty$ ajo është $(-\infty, -N)$.

Ura me vargjet. Sipas Hajnes, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \iff$ për çdo varg $x_n \to a$, $x_n \in D \setminus \{a\}$, kemi $f(x_n) \to L$.
Prandaj **shumë veti të limitit të funksionit i trashëgojmë nga vargjet**, që i kemi studiuar në Temën 2.

Njësia e limitit

Teoremë 1 (njësia). Nëse funksioni f ka limit në pikën a, ky limit është i vetëm.

Vërtetim. Le të jenë L_1 dhe L_2 dy limite të f në a. Marrim një varg $x_n \to a$, me $x_n \in D \setminus \{a\}$.

- Sipas Hajnes: $f(x_n) \to L_1$ dhe $f(x_n) \to L_2$.
- Por një varg numerik ka *vetëm një* limit (Tema 2).
- Pra $L_1 = L_2$. ■

Pasojë praktike. Nëse dy rrugë afrimi te a japin vlera të ndryshme, limiti nuk ekziston. Kështu vepruam me funksionin e Dirihlesë dhe me limitet e njëanshme.

Kufizueshmëria lokale dhe ruajtja e shenjës

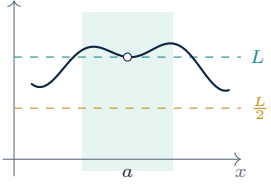
Teoremë 2 (kufizueshmëria lokale). Nëse $\lim_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$, atëherë ekziston $\delta > 0$ e tillë që f është e kufizuar në $\dot{U}_\delta(a) \cap D$.

Me $\varepsilon = 1$: ekziston δ e tillë që $|f(x) - L| < 1$, pra $L - 1 < f(x) < L + 1$ në $\dot{U}_\delta(a) \cap D$.

Teoremë 3 (ruajtja e shenjës). Nëse $\lim_{x\to a} f(x) = L > 0$, atëherë ekziston $\delta > 0$ e tillë që $f(x) > \dfrac{L}{2} > 0$ për çdo $x \in \dot{U}_\delta(a) \cap D$.

Merret $\varepsilon = \dfrac{L}{2}$: atëherë $f(x) > L - \dfrac{L}{2} = \dfrac{L}{2}$.

Interpretimi: pranë a grafiku qëndron mbi drejtëzën $y = \dfrac{L}{2}$.



Kalimi në limit në mosbarazime

Teoremë 4. Nëse $f(x) \le g(x)$ në një fqinjësi të shpuar të a dhe ekzistojnë $\lim_{x\to a} f(x) = L$, $\lim_{x\to a} g(x) = M$, atëherë

$$L \le M.$$

Vërtetim (me Hajnen): për çdo $x_n \to a$ kemi $f(x_n) \le g(x_n)$. Për vargjet dimë se mosbarazimi ruhet në limit: $L \le M$.

Kujdes. Mosbarazimi **i rreptë** nuk ruhet në limit:

$$0 < x^2 \quad \text{për } x \neq 0, \qquad \text{por} \qquad \lim_{x\to 0} 0 = 0 = \lim_{x\to 0} x^2.$$

Pyetje kontrolli. Nëse $f(x) < 3$ pranë a dhe limiti ekziston, çfarë mund të themi për $\lim_{x\to a} f(x)$? **Përgjigje:** ≤ 3, por jo domosdoshmërisht < 3.

Teorema e veprimeve

Teoremë 5. Le të jenë $\lim_{x\to a} f(x) = L$ dhe $\lim_{x\to a} g(x) = M$, ku $L, M \in \mathbb{R}$. Atëherë:

$$\lim_{x\to a} \big(f(x) \pm g(x)\big) = L \pm M, \qquad \lim_{x\to a} c\, f(x) = c\, L,$$

$$\lim_{x\to a} f(x)\, g(x) = L\, M, \qquad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \quad (M \neq 0).$$

Vërtetim (prodhimi, me Hajnen): për çdo $x_n \to a$, $x_n \neq a$:
$f(x_n) \to L,\ g(x_n) \to M \overset{\text{Tema 2}}{\Longrightarrow} f(x_n)g(x_n) \to LM.$ ■

Pasojë. Për çdo polinom: $\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$; për funksion racional me $Q(a) \neq 0$:
$\lim_{x\to a} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(a)}{Q(a)}$.

Shembull i zgjidhur: zbatimi i drejtpërdrejtë

Shembull [Hoxha–Stringa, IV.2.1]. Gjeni $\lim_{x\to 2} \dfrac{3x^2-5x+1}{x^3-6}$.

$$\lim_{x\to 2}(3x^2-5x+1) = 3\cdot\lim_{x\to 2}x^2 - 5\lim_{x\to 2}x + 1 = 12-10+1 = 3,$$
$$\lim_{x\to 2}(x^3-6) = 8-6 = 2 \neq 0.$$

Kushtet e teoremës së herësit plotësohen, prandaj $\lim_{x\to 2} \dfrac{3x^2-5x+1}{x^3-6} = \dfrac{3}{2}$.

Kujdes. Përpara se të ndani limitet, kontrolloni gjithmonë që **ekzistojnë** dhe që limiti i emëruesit **nuk është** 0.

Limiti i funksionit të përbërë

Teoremë 6. Le të jenë $\lim_{x\to a} g(x) = b$ dhe $\lim_{y\to b} f(y) = L$. Nëse $g(x) \neq b$ në një fqinjësi të shpuar të a, atëherë

$$\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big) = L.$$

Në praktikë: kjo është **metoda e zëvendësimit**, $y = g(x)$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} \overset{y=5x}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y}.$$

Kujdes (pse duhet kushti). $g(x) = 0$ për çdo x dhe $f(y) = \begin{cases} 1, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$. Atëherë $\lim_{y\to 0} f(y) = 1$, por $f(g(x)) = f(0) = 0 \to 0$.

Aritmetika e zgjeruar: kur limitet janë të pafundme

Le të jetë $L \in \mathbb{R}$. Rregullat e mëposhtme **vërtetohen** me përkufizimin dhe mund të përdoren lirisht:

Shuma	Prodhimi dhe herësi
$L + (\pm\infty) = \pm\infty$	$L \cdot (+\infty) = +\infty \quad (L > 0)$
$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$	$(+\infty) \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$
$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$	$\dfrac{L}{\pm\infty} = 0, \quad \dfrac{L}{0^+} = +\infty \quad (L > 0)$

Shënim. Këto barazime janë *shkurtime* të teoremave për limitet. P.sh. $\dfrac{L}{0^+} = +\infty$ do të thotë: nëse $f \to L > 0$ dhe $g \to 0$ me $g > 0$, atëherë $\dfrac{f}{g} \to +\infty$.

Shtatë format e pacaktuara

Kur rregullat nuk japin përgjigje, kemi një **formë të pacaktuar**:

$$\frac{0}{0}, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad \infty - \infty, \qquad 0 \cdot \infty, \qquad 1^{\infty}, \qquad 0^{0}, \qquad \infty^{0}$$

Pse quhen „të pacaktuara”? Sepse e njëjta formë mund të japë çdo rezultat. Për $x \to 0$:

$$\frac{x}{x} \to 1, \qquad \frac{x^2}{x} \to 0, \qquad \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2} \to +\infty, \qquad \frac{c\,x}{x} \to c, \qquad \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x} \text{ nuk ka limit.}$$

Vini re: $\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$ nuk ka limit të dyanshëm në 0 (nga e djathta $+\infty$, nga e majta $-\infty$); prandaj këtu përdorim $\frac{x}{x^3}$.

Kujdes. $\frac{0}{0}$ nuk është „0”, as „1”, as „nuk ekziston”. Ajo tregon vetëm se **duhet punë tjetër**: shndërrojmë shprehjen derisa forma të zhduket.

Harta e teknikave

$\frac{0}{0}$	faktorizim (Bezu, Horner), racionalizim me të konjuguarën, limitet e shquara, p.m.v. ekuivalentë
$\frac{\infty}{\infty}$	nxjerrim fuqinë më të lartë si faktor; kujdes: $\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert$
$\infty - \infty$	e konjuguara ose emërues i përbashkët $\Rightarrow \frac{0}{0}$ ose $\frac{\infty}{\infty}$
$0 \cdot \infty$	e shkruajmë si herës: $f\,g = \frac{f}{\frac{1}{g}}$
$1^\infty,\ 0^0,\ \infty^0$	$u^v = e^{v \ln u}$ $(u > 0)$. Për 1^∞: nëse $u \to 1$, $v \to \infty$ dhe $\lim v\,(u-1) = L$, atëherë $\lim u^v = e^L$. Sepse $\ln u \sim u - 1$. Për $L = +\infty$ limiti është $+\infty$; për $L = -\infty$ është 0.

Forma $\frac{0}{0}$: faktorizimi

Shembull [Hoxha–Stringa, IV.2.2 a]. Gjeni $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^4+2x^3-x-2}$.

1. **Forma:** numëruesi dhe emëruesi anullohen në $x=1$, pra kemi $\dfrac{0}{0}$.
2. **Bezu:** të dy pjesëtohen me $(x-1)$. Me skemën e Hornerit:

	1	2	0	−1	−2
1	1	3	3	2	0

$$x^4+2x^3-x-2=(x-1)(x^3+3x^2+3x+2)$$

3. **Thjeshtojmë** (për $x\neq 1$) dhe zëvendësojmë:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x^3+3x^2+3x+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x^3+3x^2+3x+2}=\frac{1-2}{9}=\boxed{-\frac{1}{9}}$$

Kujdes me shenjën: $1-2=-1$. Kontrolli numerik: $f(1{,}001)\approx -0{,}11085$.

Forma $\frac{0}{0}$: racionalizimi

Shembull [Hoxha–Stringa, IV.2.9 m]. Gjeni $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{x^2-3x+2}$.

Shumëzojmë numëruesin dhe emëruesin me **të konjuguarën** $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}$:

$$\frac{(x+3)-(3x+1)}{(x-1)(x-2)\big(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}\big)} = \frac{-2(x-1)}{(x-1)(x-2)\big(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}\big)}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{-2}{(x-2)\big(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}\big)} = \frac{-2}{(-1)\cdot 4} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Për rrënjë të tjera. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ për rrënjën kubike; për rrënjën e katërt racionalizojmë dy herë. Shihni ushtrimin IV.2.2 b në faqen me ushtrime të zgjidhura.

Forma $\frac{\infty}{\infty}$: fuqia më e lartë

Shembull [Hoxha–Stringa, IV.2.2 c]. Gjeni $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$.

$$\frac{x^2\left(2-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{2-0-0}{\sqrt{1+0}} = \boxed{2}$$

Teoremë (rregulli i shpejtë). Për $a_m, b_k \neq 0$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_m x^m + \cdots + a_0}{b_k x^k + \cdots + b_0} = \begin{cases} 0, & m < k \\ \dfrac{a_m}{b_k}, & m = k \\ \infty \text{ me shenjë}^*, & m > k \end{cases}$$

Në shembull „shkalla" e $\sqrt{x^4+1}$ është 2, si ajo e numëruesit; limiti është $\frac{2}{1} = 2$.

*__Kur__ $m > k$: për $x \to +\infty$ shenja është ajo e $\frac{a_m}{b_k}$; për $x \to -\infty$ ajo shumëzohet edhe me $(-1)^{m-k}$.

P.sh. kur $x \to -\infty$: $\frac{x^2}{x} \to -\infty$, ndërsa $\frac{x^3}{x} \to +\infty$.

Forma $\infty - \infty$ dhe kurthi $\sqrt{x^2} = |x|$

Shembull [Hoxha–Stringa, IV.2.2 d]. Gjeni $\lim_{x \to \pm\infty} \left(\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2-2}\right)$.

$$\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2-2} = \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2-2}} = \frac{3x+2}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}} + \sqrt{1-\frac{2}{x^2}}\right)}$$

$x \to +\infty$: $|x| = x$

$$\Longrightarrow \quad \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}$$

$x \to -\infty$: $|x| = -x$

$$\Longrightarrow \quad \frac{3}{-(1+1)} = -\frac{3}{2}$$

Kujdes. $\sqrt{x^2} = |x|$, **jo** x. Kur $x \to -\infty$, gabimi më i shpeshtë është të merret përsëri $\frac{3}{2}$.

Pyetje kontrolli: format

Përcaktoni **formën** dhe **teknikën**. Mos e llogaritni ende! Përgjigjet janë në faqen tjetër.

1. $\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)$ forma: _____ teknika: _____

2. $\lim_{x\to1}(x-1)\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi x}{2}$ forma: _____ teknika: _____

3. $\lim_{x\to2}\left(\frac{2}{x-2}-\frac{x^3}{x^2-4}\right)$ forma: _____ teknika: _____

4. $\lim_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)$ forma: _____ teknika: _____

Pyetje kontrolli: përgjigjet

1. $\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)$ $\infty-\infty$; e konjuguara: $\dfrac{-5x}{x+\sqrt{x^2+5x}}\to-\dfrac{5}{2}$.

2. $\lim_{x\to1}(x-1)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$ $0\cdot\infty$; herës, $u=\frac{\pi(1-x)}{2}$ dhe $\frac{\sin u}{u}\to1$: $-\dfrac{2}{\pi}$.

3. $\lim_{x\to2}\left(\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{x^3}{x^2-4}\right)$ $\infty-\infty$; emërues i përbashkët, faktorizim: $-\dfrac{5}{2}$.

4. $\lim_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)$ **nuk është** formë e pacaktuar: $-\infty-(+\infty)=-\infty$.

Mësimi. Ndryshimi i drejtimit ($+\infty$ te $-\infty$) e ndryshon formën: pyesni gjithmonë *nga ku* afrohet x.

Teorema e shtrëngimit

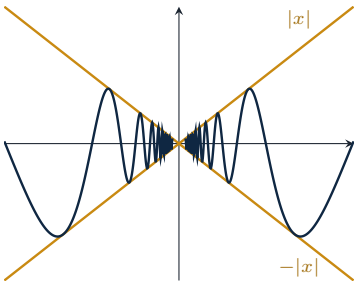
Teoremë 7 (e shtrëngimit). Nëse në një fqinjësi të shpuar të a

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

dhe $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$, atëherë

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Vërtetim (me Hajnen): për çdo $x_n \to a$ kemi $g(x_n) \leq f(x_n) \leq h(x_n)$ dhe vargjet anësore shkojnë në L. Sipas teoremës së shtrëngimit për vargjet, $f(x_n) \to L$. ■



$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ midis $-|x|$ dhe $|x|$

Shembull: $x \sin \frac{1}{x}$

Shembull [Hoxha–Stringa, IV.2.33 f]. Gjeni $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$.

Kujdes. **Nuk** shkruajmë $\lim x \cdot \lim \sin \frac{1}{x}$: $\sin \frac{1}{x}$ nuk ka limit në 0. Me Hajnen ($n \geq 1$):

$$x_n = \frac{1}{n\pi} \to 0, \ \sin \frac{1}{x_n} = \sin n\pi = 0; \qquad y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \to 0, \ \sin \frac{1}{y_n} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1.$$

Dy vargje $\to 0$ japin 0 dhe 1: limiti nuk ekziston.

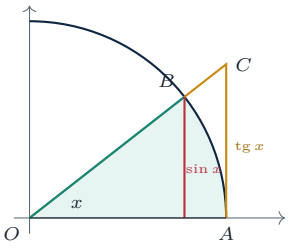
$$\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq 1 \implies -|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x| \xrightarrow{\text{shtrëngimi}} \boxed{\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0}$$

Teoremë (pasojë). Nëse $\alpha \to 0$ dhe β është e kufizuar pranë a, atëherë $\alpha\beta \to 0$. P.sh. $\frac{\sin x}{1+e^x} \to 0$ kur $x \to +\infty$ [IV.2.33 e].

Limiti i parë i shquar

Teoremë 8.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$



Për $0<x<\frac{\pi}{2}$ krahasojmë sipërfaqet:

$$S_{\triangle OAB} < S_{\text{sektorit } OAB} < S_{\triangle OAC}$$

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$$

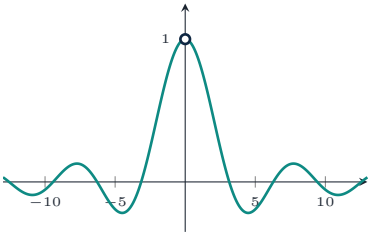
Pjesëtojmë me $\frac{1}{2}\sin x>0$ dhe marrim të anasjelltat:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Përfundimi i vërtetimit dhe grafiku

- $0 \le 1 - \cos x = 2\sin^2 \dfrac{x}{2} \le 2 \cdot \dfrac{x^2}{4} = \dfrac{x^2}{2}$, pra $\cos x \to 1$.
- Shtrëngimi në $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$ jep $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.
- $\dfrac{\sin x}{x}$ është funksion çift, prandaj edhe $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. ■

Shënim. Këndi x matet në **radianë**. Në gradë: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x^\circ}{x} = \dfrac{\pi}{180}$.



$y = \dfrac{\sin x}{x}$:

pika $(0, 1)$ mungon në grafik, por limiti ekziston

Pasojat e limitit $\frac{\sin x}{x}$

Me zëvendësim $u = u(x) \to 0$, $u \neq 0$: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin u(x)}{u(x)} = 1.$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} \overset{t=\arcsin x}{=} \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \overset{t=\operatorname{arctg} x}{=} \lim_{t\to 0} \frac{t}{\operatorname{tg} t} = 1$$

Shembull [IV.2.16 b]. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2\pi x}{\sin 3\pi x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2\pi x}{2\pi x} \cdot \dfrac{3\pi x}{\sin 3\pi x} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3}.$

Shembull: forma $0 \cdot \infty$ me zëvendësim

Shembull [Hoxha–Stringa, IV.2.2 e]. Gjeni $\lim_{x\to 1}(x-1)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$.

Forma $0\cdot\infty$. E kthejmë në herës: $\cos\frac{\pi x}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right) = \sin\frac{\pi(1-x)}{2}$.

$$(x-1)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = \frac{(x-1)\sin\frac{\pi x}{2}}{\sin\frac{\pi(1-x)}{2}} \qquad u = \frac{\pi(1-x)}{2}\to 0,\ \ x-1 = -\frac{2u}{\pi},\ \ \sin\frac{\pi x}{2} = \cos u$$

$$\lim_{x\to 1}(x-1)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = \lim_{u\to 0}\Big(-\frac{2}{\pi}\Big)\frac{u}{\sin u}\cos u = -\frac{2}{\pi}\cdot 1\cdot 1 = \boxed{-\frac{2}{\pi}}$$

Limiti i dytë i shquar

Nga Tema 2 dimë: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \nearrow e \approx 2{,}71828$ kur $n \to \infty$.

Teoremë 9. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e, \qquad \lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e.$

Vërtetimi për $x \to +\infty$. Hapi 1 (kufizimi). Për $x \geq 1$ le të jetë $n = [x]$, pra $n \leq x < n+1$ dhe $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$. Atëherë

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

majtas: bazë dhe eksponent më të vegjël,
djathtas: më të mëdhenj (bazat > 1).

Hapi 2 (kufijtë shkojnë në e). $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\dfrac{1}{n}\right) \to e \cdot 1 = e,$

$\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n = \dfrac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} \to \dfrac{e}{1} = e.$

Limiti i dytë i shquar: vazhdimi i vërtetimit

Hapi 3 (nga vargjet te funksioni, Hajne). Marrim çfarëdo vargu $x_k \to +\infty$. Atëherë $n_k = [x_k] \to \infty$, kufijtë e Hapit 1 shkojnë në e dhe, sipas teoremës së shtrëngimit për vargje, $\left(1+\frac{1}{x_k}\right)^{x_k} \to e$. Meqë vargu është i çfarëdoshëm, limiti i funksionit është e.

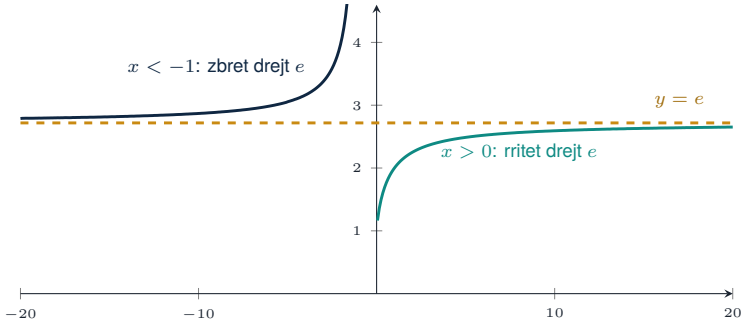
Hapi 4 ($x \to -\infty$). Për $x < -1$ vendosim $x = -(t+1)$, pra $t = -x-1 > 0$ dhe $t \to +\infty$. Meqë $1+\frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{t+1} = \frac{t}{t+1}$,

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(\frac{t}{t+1}\right)^{-(t+1)} = \left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1} = \left(1+\frac{1}{t}\right)^t \cdot \left(1+\frac{1}{t}\right) \longrightarrow e \cdot 1 = e.$$

Hapi 5 ($u \to 0$). Vendosim $u = \frac{1}{x}$: $u \to 0^+ \iff x \to +\infty$ dhe $u \to 0^- \iff x \to -\infty$. Atëherë $(1+u)^{\frac{1}{u}} = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \to e$ nga të dyja anët, pra limiti i dyanshëm është e. ■

Grafiku në faqen tjetër tregon të dyja degët: për $x > 0$ funksioni rritet drejt e, për $x < -1$ zbret drejt e.

Grafiku: si afrohet $(1+\frac{1}{x})^x$ te e



Funksioni është përcaktuar kur $1+\dfrac{1}{x} > 0$, d.m.th. për $x > 0$ ose $x < -1$.

Pasojat: limitet logaritmike dhe eksponenciale

Me vazhdueshmërinë e $\ln$ dhe të e^x (do ta vërtetojmë në kreun tjetër):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\overset{t=e^x-1}{=}\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\cdot\ln a=\ln a \quad (a>0,\ a\neq 1) \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x}=\mu \quad (\mu\neq 0)$$

Për të fundit: $\dfrac{(1+x)^\mu-1}{x}=\dfrac{e^{\mu\ln(1+x)}-1}{\mu\ln(1+x)}\cdot\dfrac{\mu\ln(1+x)}{x}\to 1\cdot\mu.$

Shembull [V.3.3 c]. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(a\,\frac{e^{ax}-1}{ax}-b\,\frac{e^{bx}-1}{bx}\right)=a-b$ $(a,b\neq 0$; nëse $a=0$ ose $b=0$, termi përkatës është 0 dhe rezultati mbetet $a-b)$.

Forma 1^∞

Teoremë 10 (formula e punës). Le të jenë $u(x) > 0$ në një fqinjësi të shpuar të a, $u(x) \to 1$, $v(x) \to +\infty$ ose $v(x) \to -\infty$, dhe le të ekzistojë limiti i fundëm $\lim_{x\to a} v(x)\big(u(x)-1\big) = k \in \mathbb{R}$. Atëherë

$$\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)} = e^k.$$

Pse: $u^v = e^{\,v\ln u}$ dhe $\ln u = \ln\big(1+(u-1)\big) \sim u-1$, pra $v\ln u \to k$; funksioni e^t është i vazhdueshëm.

Shembull [Hoxha–Stringa, V.3.1 a]. $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x$: $\quad v(u-1) = x\cdot\left(-\frac{2}{x}\right) = -2 \implies \boxed{e^{-2}}$

Shembull [Hoxha–Stringa, V.3.2 e]. $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x}\right)^{3x}$: $\quad 3x\cdot\dfrac{2}{3x} = 2 \implies \boxed{e^2}$

Kujdes. „$1^\infty = 1$" është gabim. Baza vetëm *afrohet* te 1, ndërsa eksponenti rritet pa kufi.

Pambarimisht të vegjlit dhe krahasimi i tyre

Përkufizim. α është **pambarimisht e vogël** (p.m.v.) në a nëse $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$.

Le të jenë α,β p.m.v. në a, me $\beta(x)\neq 0$ në një **fqinjësi të shpuar** të a, dhe $c=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$:

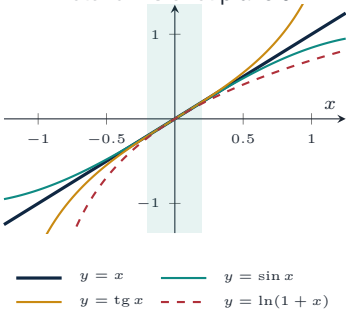
$c=0$	α është e **rendit më të lartë** se β	$\alpha=o(\beta)$
$c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$	α dhe β janë të **të njëjtit rend**	
$c=1$ (rast i veçantë)	α dhe β janë **ekuivalente**	$\alpha\sim\beta$
$c=\pm\infty$	α është e **rendit më të ulët** se β	$\beta=o(\alpha)$
raporti nuk ka limit	α dhe β janë **të pakrahasueshme**	

Dallimi: $\alpha=o(\beta)$ kërkon $\dfrac{\alpha}{\beta}\to 0$; $\alpha\sim\beta$ kërkon $\dfrac{\alpha}{\beta}\to 1$. Të dyja janë veti të **raportit**, jo të diferencës.

Shembuj në 0: $x^2=o(x)$; $\sin x\sim x$; $2x$ dhe x janë të të njëjtit rend, por jo ekuivalente; $x\sin\frac{1}{x}$ dhe x janë të pakrahasueshme [IV.3.1 b].

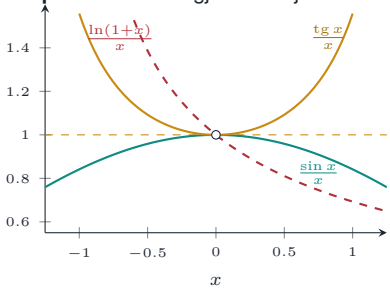
Ekuivalenca në grafik: $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\ln(1+x)$ dhe x

Vetë funksionet pranë 0



Në brezin e ngjyrosur kurbat puthiten me $y = x$.

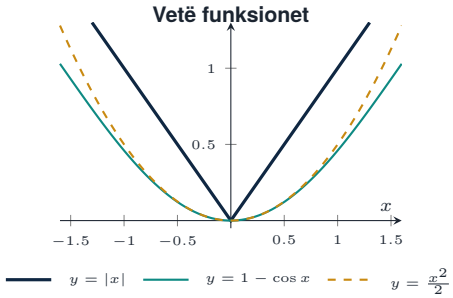
Raportet me x: të gjitha shkojnë në 1



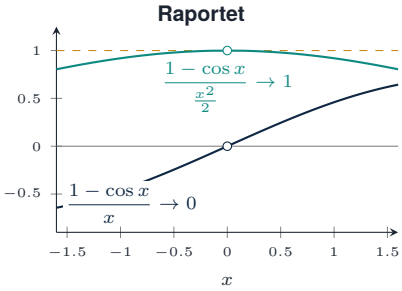
Rrethi bosh: raporti s'ka vlerë në 0, por limiti është 1.

Leximi i grafikut. $\alpha \sim \beta$ nuk do të thotë thjesht „të dyja shkojnë në 0" (këtë e bëjnë edhe x dhe x^2). Do të thotë që **raporti** $\frac{\alpha}{\beta}$ afrohet te 1: pranë 0, gabimi relativ i zëvendësimit $\sin x \approx x$ bëhet sa të duam i vogël.

Rendi në grafik: $1-\cos x$ krahasuar me x dhe $\frac{x^2}{2}$



$1-\cos x$ ngjitet pas $\frac{x^2}{2}$ dhe mbetet shumë poshtë $|x|$.



Njëri raport shkon në 1, tjetri në 0.

$1-\cos x$, për $x=$	$0{,}5$	$0{,}1$	$0{,}01$	përfundimi
raporti me $\frac{x^2}{2}$	$0{,}9793$	$0{,}9992$	$0{,}99999$	$\to 1$: $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$ (ekuivalente)
raporti me x	$0{,}2448$	$0{,}0500$	$0{,}0050$	$\to 0$: $1-\cos x = o(x)$ (rend më i lartë se x)

Shënim: në grafik raportet u llogaritën me $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$; formula e drejtpërdrejtë jep „zhurmë” pranë 0 (anulim katastrofik, shih Kreun 8).

Tabela e ekuivalencave

Për $\alpha = \alpha(x) \to 0$:

$\sin\alpha \sim \alpha$	$\operatorname{tg}\alpha \sim \alpha$	$1-\cos\alpha \sim \dfrac{\alpha^2}{2}$
$\arcsin\alpha \sim \alpha$	$\operatorname{arctg}\alpha \sim \alpha$	$\ln(1+\alpha) \sim \alpha$
$e^{\alpha}-1 \sim \alpha$	$a^{\alpha}-1 \sim \alpha \ln a$ $(a>0,\ a\neq 1)$	$(1+\alpha)^{\mu}-1 \sim \mu\,\alpha$ $(\mu \neq 0)$

Teoremë 11 (zëvendësimi). Le të jenë $\alpha \sim \alpha_1$ dhe $\beta \sim \beta_1$ në a, me $\beta, \beta_1 \neq 0$ në një fqinjësi të shpuar të a. Atëherë $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ ekziston **atëherë dhe vetëm atëherë** kur ekziston $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$, dhe të dy limitet janë të barabartë.

Vërtetim: $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\alpha}{\alpha_1} \cdot \dfrac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \dfrac{\beta_1}{\beta}$, ku faktori i parë dhe i tretë shkojnë në 1. ■

Shembuj me ekuivalenca

Shembull [IV.3.4 a]. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \arcsin x}{\operatorname{tg}(x^3)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \cdot x}{x^3} = 1.$

Shembull [IV.3.7 d]. $\sqrt{\cos x} - 1 = \big(1 + (\cos x - 1)\big)^{\frac{1}{2}} - 1 \sim \dfrac{1}{2}(\cos x - 1) \sim -\dfrac{x^2}{4}$, $x \sin x \sim x^2$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x \sin x} = -\frac{1}{4}.$$

Teoremë 12. Nëse $\beta = o(\alpha)$, atëherë $\alpha + \beta \sim \alpha$. (P.sh. $x^2 + \sin x \sim x$ kur $x \to 0$.)

Kujdes: ekuivalentët zëvendësohen vetëm si faktorë

Shembull. Gjeni $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

Kujdes: zgjidhje e gabuar. $\operatorname{tg} x \sim x$ dhe $\sin x \sim x$, pra

$$\frac{x - x}{x^3} = 0 \quad ?!$$

Zgjidhja e saktë: e kthejmë ndryshesën në prodhim:

$$\operatorname{tg} x - \sin x = \operatorname{tg} x\,(1 - \cos x) \sim x \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

Rregulli. Ekuivalentët zëvendësohen vetëm te **faktorët** e një prodhimi ose herësi, jo te **termat** e një shume.

Pambarimisht të mëdhenjtë (p.m.m.) dhe rendi i rritjes

Përkufizim. A është **pambarimisht e madhe** (p.m.m.) në a nëse $|A(x)| \to +\infty$. Për dy p.m.m. A, B: nëse $\left|\dfrac{A(x)}{B(x)}\right| \to +\infty$, themi se A është e **rendit më të lartë** se B (rritet më shpejt).

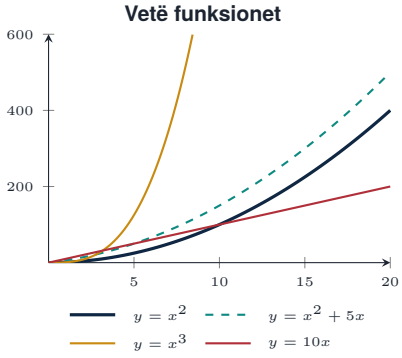
$$\ln n \ll n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n \quad (n \to \infty,\ k > 0,\ a > 1)$$ (loja „Gara e pafundësive" në faqen e lëndës)

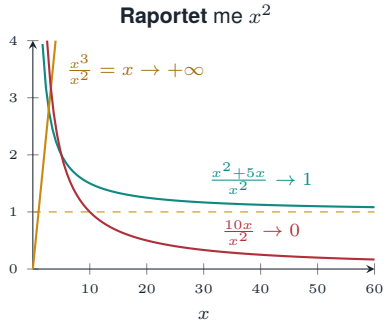
Shembull [IV.3.2 a]. $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-4x+4}$ dhe $g(x) = \dfrac{3}{x^3-8}$ janë p.m.m. në $x = 2$ dhe

$$\frac{f}{g} = \frac{(x-3)(x^2+2x+4)}{3(x-2)}, \qquad (x-3)(x^2+2x+4) \to -12.$$

Prandaj $\frac{f}{g} \to +\infty$ kur $x \to 2^-$, $\frac{f}{g} \to -\infty$ kur $x \to 2^+$: limit i dyanshëm me shenjë nuk ka, por $\left|\frac{f}{g}\right| \to +\infty$. Sipas përkufizimit, f është e rendit më të lartë se g.

P.m.m. në grafik: rendi i rritjes kur $x \to +\infty$





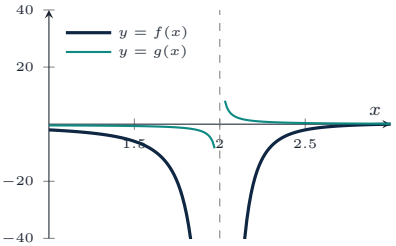
Krahasimi bëhet me raportin, si te p.m.v.

Të gjitha $\to +\infty$; ndryshimi është *sa shpejt*.

krahasimi me x^2	limiti i raportit	përfundimi
$x^2 + 5x$	1	**ekuivalente**: $x^2 + 5x \sim x^2$ (termi $5x$ „humbet")
x^3	$+\infty$	x^3 është e **rendit më të lartë** (rritet më shpejt)
$10x$	0	$10x$ është e **rendit më të ulët**, edhe pse për $x < 10$ është më e madhe

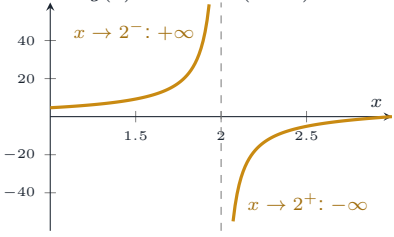
P.m.m. në grafik: shembulli në $x = 2$

$$f(x) = \frac{x-3}{(x-2)^2} \quad \text{dhe} \quad g(x) = \frac{3}{x^3-8}$$



$f \to -\infty$ nga të dyja anët; g ndryshon shenjë. f zbret shumë më shpejt.

Raporti $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{(x-3)(x^2+2x+4)}{3(x-2)}$



Limit me shenjë nuk ka, por $\left|\frac{f}{g}\right| \to +\infty$.

Leximi i grafikut. Afër $x = 2$ vlera e $|f|$ është shumëfish më e madhe se ajo e $|g|$, dhe ky shumëfish rritet pa kufi: prandaj f është p.m.m. e **rendit më të lartë** se g. Shkaku: f ka $(x-2)^2$ në emërues, kurse g vetëm $(x-2)$, sepse $x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4)$.

Shënimet O, o dhe $\sim$ në analizën e algoritmeve

Për $f, g : \mathbb{N} \to (0, +\infty)$ (p.sh. numri i hapave për të dhëna me madhësi n):

- $f = O(g)$: ekzistojnë $C > 0$ dhe N të tillë që $f(n) \le C\, g(n)$ për çdo $n \ge N$;
- $f = o(g)$: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = 0$; $\qquad f \sim g$: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = 1$.

Lidhjet: nëse $\lim \frac{f}{g}$ ekziston dhe është i fundëm, atëherë $f = O(g)$; prandaj $f = o(g) \Rightarrow f = O(g)$ dhe $f \sim g \Rightarrow f = O(g)$. E anasjellta nuk vlen: $f(n) = n(2 + \sin n)$ është $O(n)$, por $\frac{f(n)}{n}$ nuk ka limit.

Shembull. *Modeli:* numërojmë krahasimet ndërmjet elementeve; n elementë të ndryshëm; boshti zgjidhet rastësisht (njëtrajtësisht). Atëherë renditja e shpejtë kryen mesatarisht $Q(n) \sim 2n \ln n \approx 1{,}39\, n \log_2 n$ krahasime; renditja me flluska (pa ndalim të hershëm) kryen gjithmonë $B(n) = \frac{n(n-1)}{2}$. Meqë

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n \ln n}{\frac{n(n-1)}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4 \ln n}{n-1} = 0,$$

kemi $Q = o(B)$. Kuptimi asimptotik: për çdo dy konstante pozitive të fiksuara c_1, c_2 ekziston N i tillë që $c_1 Q(n) < c_2 B(n)$ për çdo $n \ge N$.

Kur matematika dhe kompjuteri nuk pajtohen

Matematikisht $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$. Po kompjuteri?

```
import math
for x in [1e-4, 1e-6, 1e-8]:
    a = (1 - math.cos(x)) / x**2
    b = 2*math.sin(x/2)**2 / x**2
    print(x, a, b)
```

x	formula `a`	formula `b`
10^{-4}	0,4999999970	0,4999999996
10^{-6}	0,5000444503	0,5000000000
10^{-8}	0,0	0,5000000000

Shpjegimi. Për $x = 10^{-8}$, në aritmetikën me 16 shifra $\cos x$ rrumbullakoset saktësisht në 1. Zbritja $1-\cos x$ zhduk të gjitha shifrat e sakta (*anulim katastrofik*). Formula $1-\cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$, e njëjta që përdorëm në vërtetim, e shmang zbritjen.

Përmbledhje

Teori

- njësia, kufizueshmëria lokale, ruajtja e shenjës
- limiti i shumës, prodhimit, herësit ($M \neq 0$)
- funksioni i përbërë $=$ zëvendësimi
- teorema e shtrëngimit
- $\dfrac{\sin x}{x} \to 1,\ \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \to e$
- p.m.v.: rendi, ekuivalenca, zëvendësimi te faktorët

Praktikë

1. zëvendësoni: a lind formë e pacaktuar?
2. identifikoni formën;
3. zgjidhni teknikën (harta e teknikave);
4. kontrolloni rezultatin numerikisht;
5. kujdes me $\sqrt{x^2} = |x|$ dhe me shenjat.

Kontroll përfundimtar

Gjeni limitet. Përgjigjet shfaqen një nga një.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{3x}$

$\dfrac{4}{3}$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$

$\dfrac{1}{2}$

3. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}$

e^3

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2^{2x}-1}{3^x-1}$

$\dfrac{2\ln 2}{\ln 3}=\dfrac{\ln 4}{\ln 3}$

5. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x^2}{x^2}$

$-\dfrac{1}{2}$ (kujdes: ndryshesë!)

Gabime tipike

1. Ndarja e limitit kur njëri prej limiteve nuk ekziston: $\lim x \sin \frac{1}{x} \neq \lim x \cdot \lim \sin \frac{1}{x}$.
2. „$\frac{0}{0} = 1$”, „$1^{\infty} = 1$”, „$\infty - \infty = 0$”.
3. $\sqrt{x^2} = x$ për $x \to -\infty$.
4. Zëvendësimi i ekuivalentëve brenda një shume: $\operatorname{tg} x - \sin x \not\sim x - x$.
5. Mosbarazimi i rreptë mendohet se ruhet në limit.
6. Zbatimi i $\dfrac{\sin u}{u} \to 1$ kur $u \not\to 0$: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$, jo 1.
7. Zbatimi i teoremës së funksionit të përbërë pa kontrolluar kushtin $g(x) \neq b$.

Ushtrime për punë të pavarur: A. Bazë

Numrat në kllapa i referohen librit *E. Hoxha, A. Stringa, Ushtrime të Analizës Matematike 1.*

Gjeni limitet:

1. $\lim_{x\to 1}(x+1)(2x-3)$ [2.5 a]
2. $\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2x}\right)$ [2.5 c]
3. $\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{x^2-2}$ [2.5 f]
4. $\lim_{x\to 3}\frac{2x+2}{x^2-9}$ [2.9 a]
5. $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}$ [2.9 c]
6. $\lim_{x\to -1}\frac{2x^3+5x^2-3x}{4x^2-2x}$ [2.9 f]
7. $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$ [2.9 j]
8. $\lim_{x\to \infty}\frac{x^3+x+1}{x^4-3x^2-1}$ [2.12 a]
9. $\lim_{x\to \infty}\frac{2x^2+7x-3}{x^5-6x^2+x}$ [2.12 b]
10. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$ [2.14 a]
11. $\lim_{x\to -\infty}3^{2x}$ [2.15 a]
12. $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}$ [2.15 c]
13. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{3x}$ [2.16 a]
14. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{tg} 5x}$ [2.16 d]

Ushtrime për punë të pavarur: B. Teknika

Gjeni limitet:

15. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$ $(m,n\in\mathbb{N})$ [2.9 k]

16. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[5]{3x^4+6x}+\sqrt[4]{x^2+1}}{4x+\sqrt{3x+1}}$ [2.12 e]

17. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{x^3}{x^2-4}\right)$ [2.14 b]

18. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{\cos x}$ [2.16 f]

19. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$ [2.16 j]

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3x}$ [V.3.2 a]

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{2x}\right)^{x}$ [V.3.2 d]

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-3}\right)^{x}$ [V.3.2 f]

23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x}$ [V.3.3 a]

24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^{-x}}{\sin x}$ [V.3.3 e]

25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{2x}-1}{3^{x}-1}$ [V.3.3 h]

Ushtrime për punë të pavarur: C. Thellim

26. Gjeni a të tillë që $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{x^2+ax-1-a}=\dfrac{1}{3}$. [2.11 a]

27. Gjeni a dhe b të tillë që $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax+b}{x-1}=\dfrac{1}{2}$ dhe $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{ax+b}{x-1}=1$. [2.13]

28. a) Tregoni se, nëse ekzistojnë $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ dhe $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)$, atëherë ekziston edhe $\lim\limits_{x\to a}g(x)$.
    b) Nëse ekzistojnë $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ dhe $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)$, a ekziston domosdoshmërisht $\lim\limits_{x\to a}g(x)$? [2.21]

29. Me teoremën e shtrëngimit gjeni: a) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x\sin x$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^3+x^2}\,\sin\dfrac{\pi}{x}$. [2.33 a, g]

30. Për cilën vlerë të $a>0$ funksioni $f(x)=x^{2a}\sin(x^a)$ është p.m.v. e rendit 5 në lidhje me x kur $x\to 0^+$? [3.6]

31. Me p.m.v. ekuivalente gjeni $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos x^2}{x^2}$. [3.7 c]

Zgjidhjet e plota hap pas hapi të shembujve janë në faqen e lëndës:
s-duraj-informatike.netlify.app/ushtrime_limiti

Zgjidhje orientuese: A dhe B

A. Bazë

1. -2: zëvendësim i drejtpërdrejtë.
2. $\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$.
3. 0: emëruesi $\to 23 \neq 0$.
4. $\frac{8}{0}$: $+\infty$ nga e djathta, $-\infty$ nga e majta; limiti i dyanshëm nuk ekziston.
5. $\frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x - 1 \to -2$.
6. $\frac{x(2x-1)(x+3)}{2x(2x-1)} = \frac{x+3}{2} \to 1$.
7. $x - 2 = (\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2}) \Rightarrow 2\sqrt{2}$.

8.–9. 0: shkalla e numëruesit më e vogël.

10. $\frac{x+1-2}{x^2-1} = \frac{1}{x+1} \to \frac{1}{2}$.

11.–12. 0: $9^x \to 0$ kur $x \to -\infty$; $\left(\frac{1}{3}\right)^x \to 0$.

13. $\frac{\sin 4x}{4x} \cdot \frac{4}{3} \to \frac{4}{3}$.

14. $\frac{\operatorname{tg} 4x}{4x} \cdot \frac{5x}{\operatorname{tg} 5x} \cdot \frac{4}{5} \to \frac{4}{5}$.

B. Teknika

15. $x = t^{mn}$: $\frac{t^m-1}{t^n-1} \to \frac{m}{n}$ (Bezu).
16. 0: numëruesi $\sim \sqrt[5]{3}\, x^{\frac{4}{5}}$, emëruesi $\sim 4x$.
17. $\frac{-(x-2)(x^2+2x+2)}{(x-2)(x+2)} \to -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}$.
18. $\frac{1-\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1+\sin x} \to 0$.
19. $\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{x-a} \to \cos a$.
20. $\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^3 \to e^3$.
21. 1^∞: $\exp\lim x \cdot \left(-\frac{3}{2x}\right) = e^{-\frac{3}{2}}$.
22. $1 + \frac{4}{2x-3}$: $\exp\lim \frac{4x}{2x-3} = e^2$.
23. $e^{2x} - 1 \sim 2x \Rightarrow 2$.
24. $1 - e^{-x} \sim x$, $\sin x \sim x \Rightarrow 1$.
25. $\frac{2x \ln 2}{x \ln 3} = \frac{\ln 4}{\ln 3}$.

Zgjidhje orientuese: C. Thellim

26. $x^2+ax-1-a=(x-1)(x+1+a)$, prandaj limiti është $-\dfrac{2}{2+a}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow a=-8$.

27. Në ∞ limiti është a, pra $a=\frac{1}{2}$; në -1: $\frac{b-a}{-2}=1\Rightarrow b=a-2=-\frac{3}{2}$.

28. a) Po: $g=(f+g)-f$ dhe zbatojmë rregullin e diferencës.

    b) Jo: $f(x)=x$, $g(x)=\frac{1}{x}$, $a=0$; $fg=1$, por $\lim\limits_{x\to 0} g$ nuk ekziston. (Nëse $\lim f\neq 0$, atëherë po: $g=\frac{fg}{f}$.)

29. a) $|e^x\sin x|\le e^x\to 0$, pra 0. b) $\left|\sqrt{x^3+x^2}\sin\frac{\pi}{x}\right|\le |x|\sqrt{x+1}\to 0$, pra 0.

30. $\sin(x^a)\sim x^a$, pra $f(x)\sim x^{3a}$; rendi 5 kërkon $3a=5$, d.m.th. $a=\dfrac{5}{3}$.

31. $\cos x-\cos x^2=-2\sin\dfrac{x+x^2}{2}\,\sin\dfrac{x-x^2}{2}\sim -2\cdot\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{x}{2}=-\dfrac{x^2}{2}$, pra limiti është $-\dfrac{1}{2}$.

Çfarë vjen më pas

- **Leksioni i ardhshëm: funksionet e vazhdueshme.** Do të shohim pse kemi pasur të drejtë të shkruanim $\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$ dhe $\lim \ln u = \ln \lim u$, si dhe si klasifikohen pikat e këputjes.
- **Materialet në faqe:**
  - ushtrime të zgjidhura hap pas hapi (27 ushtrime, me kontroll numerik);
  - „Laboratori i limiteve të shquara": rrethi njësi, shtrëngimi, numri e, ekuivalencat;
  - tri video të shkurtra dhe kuizi „Limiti i funksionit (II)".

Faleminderit!

Prof. As. Dr. Siditë Duraj