ANALIZË MATEMATIKE I · BACHELOR NË INFORMATIKË, VITI I

# Limiti i funksionit

Pjesa I: kuptimi, përkufizimi i Hajnes dhe përkufizimi i Koshiut (ε–δ)

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D(f) : \; 0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \varepsilon$$

Prof. As. Dr. Siditë Duraj · Departamenti i Matematikës, FSHN · Universiteti i Shkodrës «Luigj Gurakuqi»

# Pse limiti i funksionit në informatikë?

### SHPEJTËSIA E NDRYSHIMIT

Sa shpejt ndryshon një sasi në një çast? Raporti

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

nuk përcaktohet për $h=0$. Përgjigjen e jep **limiti kur** $h \to 0$: derivati.

### SJELLJA ASIMPTOTIKE

Si rritet koha e ekzekutimit kur rritet madhësia $n$ e të dhënave?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T(n)}{n^2} = 3$$

do të thotë që koha rritet me rendin e $n^2$.

### LLOGARITJA NUMERIKE

Disa formula bëhen **numerikisht të paqëndrueshme** kur $h$ është shumë i vogël, për shkak të rrumbullakimit dhe humbjes së shifrave domethënëse.

Limiti tregon **çfarë** duhet të afrojë llogaritja.

**IDEJA KYÇE** Te vargjet kishim $n \to \infty$ me hapa të plotë. Tani $x$ merr vlera të bashkësisë së përcaktimit **gjithnjë e më afër** një pike $a$.

# Çfarë duhet të dini para këtij leksioni

### LIMITI I VARGUT

$a_n \to a \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N :\ n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$. Teoremat e veprimeve dhe të dy policëve.

### VLERA ABSOLUTE

$|x-a|$ është distanca nga $x$ te $a$: $|x-a| < \delta \iff a - \delta < x < a + \delta$.

### MOSBARAZIMET

Rregullat e kalimit: $|u\,v| = |u|\,|v|$, $|u+v| \le |u| + |v|$, $|u| - |v| \le |u - v|$.

### FAKTORIZIMI DHE RACIONALIZIMI

$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$;

$\sqrt{u} - 1 = \dfrac{u-1}{\sqrt{u}+1}$ për $u \ge 0$.

### BASHKËSIA E PËRCAKTIMIT

$D(f)$: emëruesi $\neq 0$, rrënja me tregues çift nga numër $\ge 0$, logaritmi nga numër $> 0$.

### SHËNIMI

Te teksti bazë pika shënohet $x_0$; këtu, si te libri i ushtrimeve, e shënojmë $a$.

# Rezultatet e të nxënit

1. Të përshkruajë me fjalë dhe me tabelë vlerash kuptimin e $\lim_{x \to a} f(x) = L$ dhe ta dallojë limitin nga vlera $f(a)$.
2. Të përdorë përkufizimin e Hajnes dhe të tregojë me dy vargje që një limit nuk ekziston.
3. Të gjejë $\delta(\varepsilon)$ dhe të shkruajë provën $\varepsilon$–$\delta$ për një limit të thjeshtë.
4. Të llogarisë limitet e njëanshme dhe të vendosë me to nëse limiti ekziston.
5. Të shkruajë përkufizimet e limiteve në $\pm\infty$ dhe të limiteve të pafundme dhe të gjejë asimptotat.
6. Të identifikojë dhe të shpjegojë një rast ku tabela ose llogaritja numerike jep përfundim të pasaktë për limitin.

# Struktura e leksionit: dy seanca

| | | |
|---|---|---|
| I | **Ideja intuitive**<br>tabela vlerash, vrima në grafik, limiti dhe vlera f(a) | Seanca 1 |
| II | **Ura nga vargjet**<br>pika limite, përkufizimi i Hajnes, mosekzistenca me dy vargje | Seanca 1 |
| III | **Përkufizimi i Koshiut (ε–δ)**<br>nga “afër” te numrat, shembuj, ushtrime aktive, ekuivalenca | Seanca 1 |
| IV | **Limitet e njëanshme**<br>majtas, djathtas, kriteri i ekzistencës, skaji i bashkësisë së përcaktimit | Seanca 2 |
| V | **Pafundësia**<br>limitet në ±∞, limitet e pafundme, asimptotat | Seanca 2 |
| VI | **Grafiku dhe informatika**<br>leximi nga grafiku, kurthi i tabelave, gabimi numerik, rendi i rritjes | Seanca 2 |
| VII | **Përmbledhje**<br>kontrolli përfundimtar, gabimet tipike, ushtrime | Seanca 2 |

Çdo seancë: 2 × 50 minuta. Faqet me shënimin “MATERIAL PLOTËSUES” janë për thellim dhe studim individual.

# I

# Ideja intuitive

Afrohemi te pika a, pa e prekur atë, dhe shohim ku shkojnë vlerat

# Afrohemi te pika, pa e prekur

**TABELË VLERASH:** $f(x) = 5x + 3$ **PRANË** $x = 2$

| $x$ | 1,9 | 1,99 | 1,999 | 2,001 | 2,01 | 2,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 12,5 | 12,95 | 12,995 | 13,005 | 13,05 | 13,5 |

Nga të dyja anët, vlerat afrohen te 13.
*(Hoxha & Stringa, ushtrimi 1.7 a, f. 72)*

**SHËNIMI**

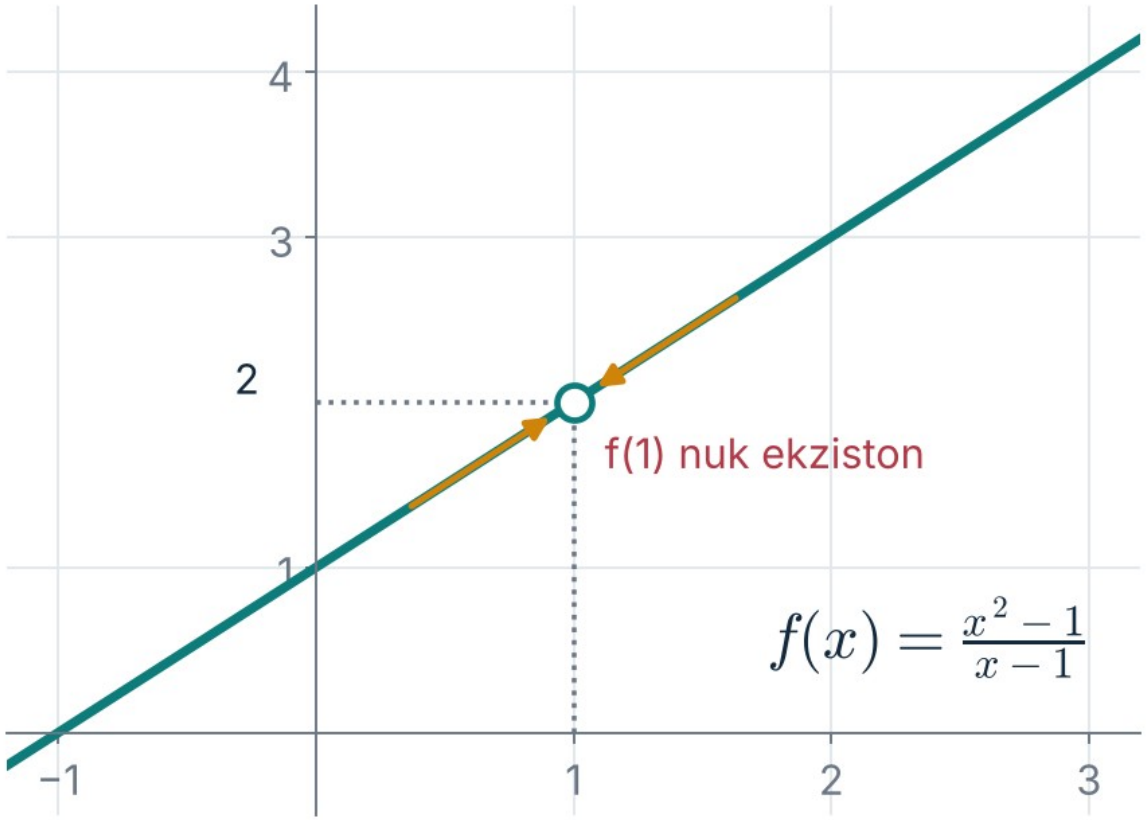
$$\lim_{x \to 2}(5x + 3) = 13$$

Lexohet: "limiti i $f(x)$, kur $x$ shkon te 2, është 13".

**IDEJA KYÇE** Kur shkruajmë $x \to a$, **nuk** vendosim $x = a$. Pyesim: çfarë ndodh me $f(x)$ kur $x$ është shumë afër $a$-së, por i ndryshëm prej saj?

**KUJDES** Në këtë shembull limiti përputhet me $f(2) = 13$. Kjo veti lidhet me **vazhdueshmërinë** dhe nuk vlen për çdo funksion.

# Limiti kur funksioni nuk është i përcaktuar në pikë




**THJESHTIMI**

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$$

**vetëm për** $x \neq 1$. Në $x = 1$ kemi $\frac{0}{0}$: $f(1)$ nuk ekziston.

**TABELA**

| $x$ | 0,9 | 0,99 | 1,01 | 1,1 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1,9 | 1,99 | 2,01 | 2,1 |

**IDEJA KYÇE** Grafiku është drejtëza $y = x + 1$ me një **vrimë** në $(1,\ 2)$. Limiti ekziston, $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$, edhe pse $f(1)$ nuk ekziston.

# Limiti nuk varet nga vlera f(a)

**PYETJE NGA LIBRI**

Nëse $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$, a mund të jetë $f(2) = 3$? *(Hoxha & Stringa, ushtrimi 1.4, f. 72)*

**Po.** Për shembull

$$f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$$

**TABELË ME RRËNJË**

$f(x) = 1 + \sqrt{x - 2}$, pranë $x = 3$: *(Hoxha & Stringa, ushtrimi 1.8 a, f. 73)*

| $x$ | 2,99 | 2,999 | 3,001 | 3,01 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1,9950 | 1,9995 | 2,0005 | 2,0050 |

Vlerat afrohen te 2.

**IDEJA KYÇE** Limiti varet vetëm nga vlerat **afër** $a$-së, jo nga vlera **në** $a$. Prandaj në përkufizim shkruajmë gjithmonë $0 < |x - a|$. *Teksti bazë, f. 79:* $g(x) = x^2$ *për* $x \neq 2$, $g(2) = 3$, *por* $\lim_{x\to 2} g(x) = 4$.

**KUJDES** Një tabelë vlerash **sugjeron** limitin, por nuk e provon: ajo shqyrton vetëm një numër të fundmë pikash. Në pjesën VI do të shohim një rast ku tabela të çon në përfundim të gabuar.

# Pyetje kontrolli: ideja

**PYETJE**

1. Plotësoni tabelën dhe parashikoni limitin: $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ për $x = 1{,}9;\ 1{,}99;\ 2{,}01;\ 2{,}1.$
2. Pse $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ nuk është i përcaktuar në $x = 2$? A pengon kjo ekzistencën e limitit?
3. E vërtetë apo e gabuar: "Nëse $f(a) = 7$, atëherë $\lim_{x \to a} f(x) = 7$."

Diskutoni në çift për 3 minuta para se të shihni përgjigjen.

# Përgjigje: ideja

**PËRGJIGJE**

1. $f(x) = x + 2$ për $x \neq 2$: vlerat janë $3{,}9;\ 3{,}99;\ 4{,}01;\ 4{,}1$. Parashikimi: $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$.
2. Në $x = 2$ emëruesi është $0$, pra $2 \notin D(f)$. **Nuk** e pengon: limiti varet vetëm nga vlerat për $x \neq 2$.
3. **E gabuar.** Kundërshembull që plotëson kushtin $f(2) = 7$:

$$f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \neq 2 \\ 7, & x = 2 \end{cases} \qquad f(2) = 7, \quad \lim_{x\to 2} f(x) = 5.$$

Barazimi $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ quhet vazhdueshmëri dhe studiohet në kreun III.

# II

# Ura nga vargjet

Përkufizimi i Hajnes: limiti i funksionit me anë të limitit të vargjeve

# Ku ka kuptim limiti? Pika limite

**PËRKUFIZIM**

Pika $a \in \mathbb{R}$ quhet **pikë limite (pikë grumbullimi)** e bashkësisë $D$ nëse çdo zonë rrethuese $(a-\delta,\ a+\delta)$ përmban të paktën një pikë të $D$ të **ndryshme nga** $a$.

*(Teksti bazë: II.5, f. 76)*

**PIKË E IZOLUAR**

Pika $a \in D$ është **e izoluar** nëse ka një zonë rrethuese të saj pa asnjë pikë tjetër të $D$.

Në një pikë të izoluar nuk kemi si t'i afrohemi $a$-së me pika të bashkësisë së përcaktimit, prandaj limiti **nuk përkufizohet**.

**SHEMBUJ për** $D = (0,1) \cup \{2\}$

- $0$ dhe $1$ janë pika limite, edhe pse $0 \notin D$ dhe $1 \notin D$: mund të afrohemi nga brenda intervalit.
- $0{,}5$ është pikë limite dhe i përket $D$-së.
- $2$ është pikë e izoluar: $(2-0{,}5;\ 2+0{,}5)$ nuk përmban asnjë pikë tjetër të $D$.

# Përkufizimi i limitit sipas Hajnes

**PËRKUFIZIM (HAJNE)**

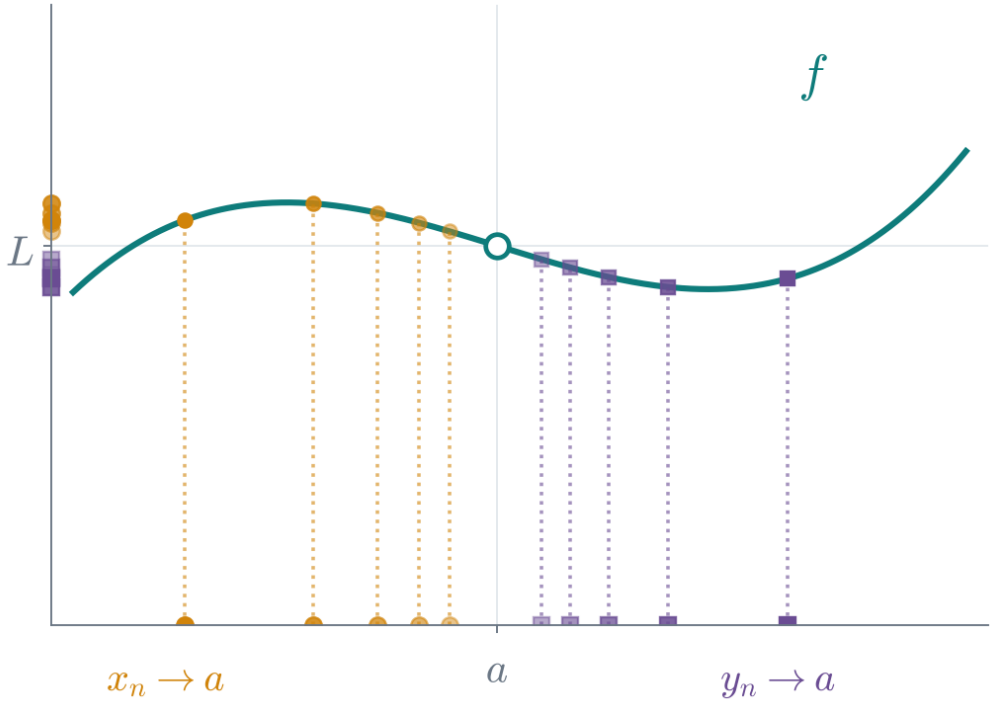
Le të jetë $a$ pikë limite e $D(f)$. Themi se

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

nëse për **çdo** varg $(x_n)$ me $x_n \in D(f)$, $x_n \neq a$ dhe $x_n \to a$, kemi

$$f(x_n) \to L.$$

*(Teksti bazë: II.5, Përkufizimi 1, f. 77)*




**IDEJA KYÇE** Funksioni e "përkthen" çdo varg që shkon te $a$ në një varg vlerash që shkon te $L$, **pavarësisht nga ana dhe ritmi** i afrimit.

**KUJDES** Fjala kyçe është **çdo**. Një ose disa vargje me të njëjtin limit të vlerave **nuk provojnë** ekzistencën e limitit të funksionit.

# Shembull: limiti me vargje

**DETYRA**

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\,?$$

**ZGJIDHJA**

Le të jetë $(x_n)$ çfarëdo varg me $x_n \neq 1$ dhe $x_n \to 1$. Atëherë

$$f(x_n)=\frac{x_n^2-1}{x_n-1}=x_n+1\ \to\ 1+1=2.$$

Meqë vargu ishte çfarëdo, $\lim_{x\to 1} f(x)=2$.

**ÇFARË FITUAM**

Përmes kriterit të Hajnes, teoremat përkatëse për limitet e vargjeve përdoren edhe për limitet e funksioneve, **duke respektuar hipotezat e tyre**. Për shembull:

$$x_n \to a \ \Rightarrow\ x_n^2 \to a^2,$$

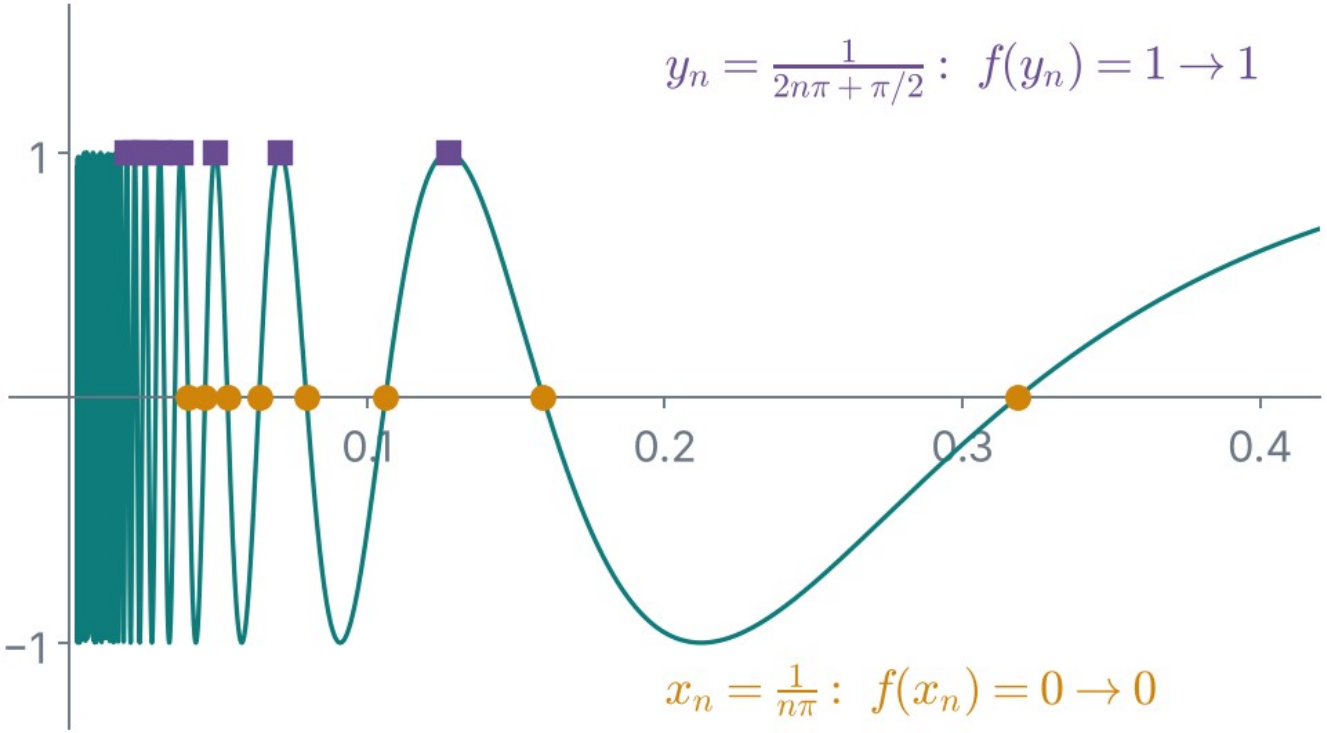
$$x_n \to a,\ x_n \geq 0,\ a \geq 0 \ \Rightarrow\ \sqrt{x_n} \to \sqrt{a}.$$

Prandaj $\lim_{x\to a} x^2 = a^2$ për çdo $a \in \mathbb{R}$.

**NË INFORMATIKË** Përkufizimi i Hajnes i ngjan mënyrës si testohet një program: japim hyrjet $x_1, x_2, \ldots \to a$ dhe shohim daljet $f(x_1), f(x_2), \ldots$ Dallimi: matematikisht duhet të vlejë për **të gjitha** vargjet, jo vetëm për ato që testojmë.

# Kur limiti nuk ekziston: dy vargje

**TEOREMË** Le të jenë $(x_n)$ dhe $(y_n)$ dy vargje me $x_n, y_n \in D(f) \setminus \{a\}$, $x_n \to a$, $y_n \to a$. Nëse $f(x_n) \to L_1$, $f(y_n) \to L_2$ dhe $L_1 \neq L_2$, atëherë $\lim_{x \to a} f(x)$ **nuk ekziston**.




**SHEMBULL:** $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $x \to 0$

$$x_n = \frac{1}{n\pi} : \quad f(x_n) = 0$$

$$y_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2} : \quad f(y_n) = 1$$

Të dy vargjet shkojnë te $0$, por limitet e vlerave janë $0 \neq 1$: limiti nuk ekziston.

*Kjo është një mënyrë e mjaftueshme për të provuar mosekzistencën, jo e vetmja. Figura është ilustruese: lëkundjet pranë $0$ janë pafundësisht shumë.*

# Funksioni i Dirihlesë: limiti nuk ekziston në asnjë pikë

**USHTRIM I ZGJIDHUR** ***(Hoxha & Stringa, ushtrimi 1.2, f. 70)***

Tregoni që funksioni $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ racional} \\ 0, & x \text{ irracional} \end{cases}$ nuk ka limit në asnjë pikë $a \in \mathbb{R}$.

**RASTI 1: $a$ RACIONAL**

$x_n = a + \dfrac{1}{n}$ (racionalë) : $f(x_n) = 1 \to 1$

$y_n = a + \dfrac{\sqrt{2}}{n}$ (irracionalë) : $f(y_n) = 0 \to 0$

Të dy vargjet $\to a$, por limitet janë $1 \neq 0$.

**RASTI 2: $a$ IRRACIONAL**

$x_n = a + \dfrac{1}{n}$ (irracionalë) : $f(x_n) = 0 \to 0$

Ekziston një varg racionalësh $y_n \to a$ (p.sh. përafrimet dhjetore të $a$), me $f(y_n) = 1 \to 1$. Përsëri $0 \neq 1$.

**IDEJA KYÇE** Racionalët dhe irracionalët janë kudo të dendur: në çdo zonë rrethuese të pikës $a$ gjenden pika ku funksioni merr vlerën $0$ dhe pika ku merr vlerën $1$.

# III

# Përkufizimi i Koshiut (ε–δ)

Nga fjala “afër” te mosbarazimet

# Sa afër? Nga fjalët te numrat

**PYETJA** ***(Hoxha & Stringa, ushtrimi 1.7 b–d, f. 72)***

Për $f(x) = 5x + 3$ dhe limitin $13$ në $x = 2$: sa afër $2$-shit duhet të jetë $x$, që $f(x)$ të jetë afër $13$-ës me saktësinë e kërkuar?

| Saktësia e kërkuar | Kushti mbi f(x) | Mjafton që | Pra |
|---|---|---|---|
| $0{,}1$ | $\lvert 5x + 3 - 13\rvert < 0{,}1$ | $\lvert x - 2\rvert < 0{,}02$ | $\delta = 0{,}02$ |
| $0{,}01$ | $\lvert 5x + 3 - 13\rvert < 0{,}01$ | $\lvert x - 2\rvert < 0{,}002$ | $\delta = 0{,}002$ |
| $\varepsilon > 0$ çfarëdo | $\lvert f(x) - 13\rvert = 5\lvert x - 2\rvert < \varepsilon$ | $\lvert x - 2\rvert < \dfrac{\varepsilon}{5}$ | $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$ |

**IDEJA KYÇE** Mund ta mendojmë si lojë: **kundërshtari** jep një saktësi $\varepsilon$ sado të vogël; **ne** duhet të gjejmë $\delta$ që e garanton. Nëse ia dalim për **çdo** $\varepsilon > 0$, limiti është provuar.

# Përkufizimi i Koshiut (ε–δ)

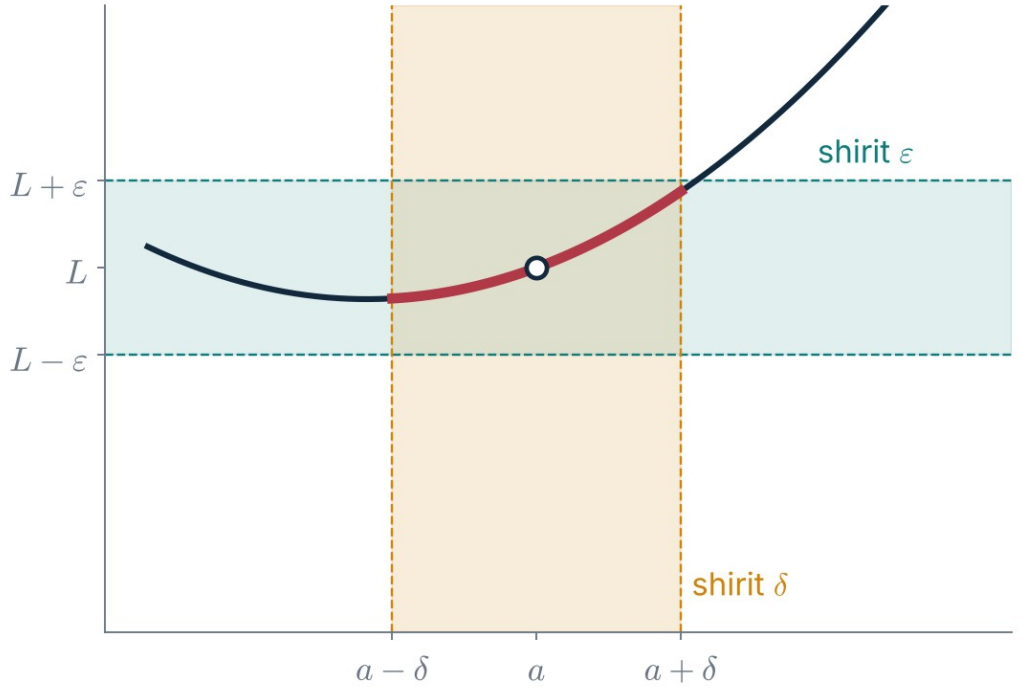
**PËRKUFIZIM**

Le të jetë $a$ pikë limite e $D(f)$. $\lim_{x\to a} f(x) = L$ do të thotë:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D(f) :$$

$$0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Radha: **jepet** $\varepsilon$, **zgjidhet** $\delta$ (që varet nga $\varepsilon$), dhe **pastaj** kontrollohet çdo $x$. *(Teksti bazë: Përkufizimi 2, f. 77–78)*




**LEXIMI GJEOMETRIK**

Sado i ngushtë të jetë brezi horizontal $(L-\varepsilon,\, L+\varepsilon)$, gjendet një brez vertikal rreth $a$ ku grafiku (pa pikën $a$) qëndron brenda tij.

**KUJDES** Mosbarazimet janë **strikte**: pikat në vijat kufizuese të brezave nuk përfshihen.

# Shembull 1: një funksion linear

**DETYRA**

Provoni me përkufizimin: $\lim_{x\to 2}(5x+3)=13$.

**SI E GJEJMË $\delta$ (ANALIZA)**

Duam $|f(x)-13|<\varepsilon$. Llogaritim:

$$|5x+3-13| = |5x-10| = 5|x-2|.$$

Kjo është $<\varepsilon$ kur $|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{5}$. Zgjedhim $\delta=\dfrac{\varepsilon}{5}$.

**PROVA E SHKRUAR**

Le të jetë $\varepsilon>0$ çfarëdo. Marrim $\delta=\dfrac{\varepsilon}{5}>0$.

Atëherë për çdo $x$ me $0<|x-2|<\delta$:

$$|f(x)-13| = 5|x-2| < 5\delta = \varepsilon.$$

Pra $\lim_{x\to 2}(5x+3)=13$.

*Çdo $\delta$ më i vogël, p.sh. $\dfrac{\varepsilon}{10}$, bën gjithashtu.*

**IDEJA KYÇE** **Analiza** nis nga $|f(x)-L|<\varepsilon$ dhe gjen $\delta$; **prova** nis nga $\delta$ dhe arrin te $\varepsilon$. *I ngjashëm në tekstin bazë:* $\lim_{x\to 4}(2x-1)=7$, $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$ *(f. 79).*

# Ushtrime aktive: shkruani dhe korrigjoni një provë

**USHTRIMI 1**

Provoni me përkufizimin $\varepsilon$–$\delta$: $\lim_{x\to 1}(3x-2)=1$. Shkruani si e gjeni $\delta$ dhe provën e shkruar.

**USHTRIMI 2: GJENI GABIMIN**

Një student shkruan për $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$:

*"Le të jetë* $\varepsilon > 0$. *Kemi* $|x^2-4| = |x-2|\,|x+2|$. *Marrim* $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|x+2|}$. *Atëherë për* $0<|x-2|<\delta$ *kemi* $|x^2-4| < \delta\,|x+2| = \varepsilon$."

1. Cili kusht i përkufizimit shkelet?
2. Korrigjoni provën. *Ndihmë: kufizoni fillimisht* $|x-2|<1$.

# Përgjigje: ushtrimet aktive

**USHTRIMI 1**

**Analiza:**

$$|3x-2-1| = 3|x-1| < \varepsilon \iff |x-1| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

**Prova:** Le të jetë $\varepsilon > 0$; marrim $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$. Për $0 < |x-1| < \delta$:

$$|(3x-2)-1| = 3|x-1| < 3\delta = \varepsilon.$$

**USHTRIMI 2**

**Gabimi:** $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|x+2|}$ varet nga $x$. Por $\delta$ zgjidhet **para** $x$-it: duhet të jetë një numër që vlen për të gjithë $x$-at.

**Korrigjimi:** për $|x-2| < 1$ kemi $1 < x < 3$, pra $|x+2| < 5$. Marrim $\delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{5}\right\}$:

$$|x^2-4| = |x-2|\,|x+2| < 5\delta \le \varepsilon.$$

*(Teksti bazë: f. 79–80, i njëjti shembull)*

**IDEJA KYÇE** Kushti $\delta \le 1$ e kufizon nga sipër faktorin: $|x+2| < 5$; kushti $\delta \le \dfrac{\varepsilon}{5}$ kontrollon gabimin.

# Shembull 2: një thyesë racionale

**USHTRIM I ZGJIDHUR** *(Hoxha & Stringa, ushtrimi 1.1 a, f. 67)*

Provoni që $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2-2x-3} = \dfrac{1}{2}$. Këtu $D(f) = \mathbb{R}\setminus\{-1,\,3\}$.

**SI E GJEJMË $\delta$**

Për $x \in D(f)$:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-3)(x+1)} = \frac{x-1}{x-3},$$

$$\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| = \frac{|x+1|}{2\,|x-3|}.$$

Kufizojmë fillimisht $|x+1|<1$: atëherë $-2<x<0$, pra $|x-3|>3$ dhe

$$\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| < \frac{|x+1|}{6}.$$

Kjo është $<\varepsilon$ kur $|x+1|<6\varepsilon$.

**PROVA E SHKRUAR**

Le të jetë $\varepsilon>0$; marrim $\delta = \min\{1,\,6\varepsilon\}$. Për $x\in D(f)$ me $0<|x+1|<\delta$:

$$\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| = \frac{|x+1|}{2|x-3|} < \frac{\delta}{6} \le \varepsilon.$$

*Libri zgjedh $\delta < \min\left\{4, \dfrac{8\varepsilon}{1+2\varepsilon}\right\}$; është gjithashtu e saktë. Zgjedhja $\delta\le 1$ jep llogari më të thjeshta.*

# Shembull 3: një rrënjë katrore

**DETYRA** *(Hoxha & Stringa, ushtrimi 1.8 d, f. 73)*

Provoni që $\lim_{x\to 3}\left(1+\sqrt{x-2}\right)=2$, ku $D(f)=[2,+\infty)$.

**SI E GJEJMË $\delta$**

Racionalizojmë:

$$|f(x)-2|=\left|\sqrt{x-2}-1\right|=\frac{|x-3|}{\sqrt{x-2}+1}$$

Meqë $\sqrt{x-2}+1\geq 1$: $|f(x)-2|\leq|x-3|$.

**PROVA E SHKRUAR**

Le të jetë $\varepsilon>0$. Marrim $\delta=\min\{1,\ \varepsilon\}$. Për $0<|x-3|<\delta$:

$$|f(x)-2|\leq|x-3|<\delta\leq\varepsilon.$$

**Roli i minimumit:** kushti $\delta\leq 1$ siguron që $x\in(2,4)\subset D(f)$ (afërsia me pikën); kushti $\delta\leq\varepsilon$ kontrollon gabimin në vlerën e funksionit.

**IDEJA KYÇE** Truku i përbashkët i shembujve: e shkruajmë $|f(x)-L|$ si $|x-a|\cdot(\text{një faktor})$, dhe e kufizojmë faktorin duke marrë fillimisht $\delta\leq 1$.

# Dy përkufizime, një koncept

**TEOREMË** Përkufizimi i Hajnes (me vargje) dhe përkufizimi i Koshiut ($\varepsilon$–$\delta$) janë **ekuivalentë**: secili rrjedh nga tjetri. *(Teksti bazë: f. 78, pa vërtetim)*

| Qëllimi | Përkufizimi më i përshtatshëm | Pse |
|---|---|---|
| Të provojmë që limiti ekziston | Koshi, ose Hajne me teoremat e vargjeve | duhet një argument për **çdo** $x$ afër $a$ |
| Të provojmë që limiti nuk ekziston | Hajne me dy vargje | mjafton një kundërshembull |
| Të llogaritim limitin | rregullat e limiteve (Leksioni II) | llogaritja bëhet më efikase |

**KUJDES** Përkufizimet shërbejnë kryesisht për **argumentim rigoroz**: ato provojnë që një numër **i dhënë** $L$ është limiti. Vlerën e $L$ e sugjerojnë tabela, grafiku ose rregullat; pastaj e provojmë.

# Skicë: pse Hajne ⇔ Koshi

### KOSHI ⇒ HAJNE

Le të jetë $x_n \to a$, $x_n \neq a$, $x_n \in D(f)$, dhe $\varepsilon > 0$.

Nga Koshi: ekziston $\delta > 0$ që
$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Meqë $x_n \to a$: ekziston $N$ që për $n > N$ kemi
$|x_n - a| < \delta$, dhe $x_n \neq a$.

Pra për $n > N$: $|f(x_n) - L| < \varepsilon$, d.m.th.
$f(x_n) \to L$.

### HAJNE ⇒ KOSHI (ME KUNDËRSHTIM)

Supozojmë se Koshi nuk vlen: ekziston $\varepsilon_0 > 0$ i tillë që për **çdo** $\delta > 0$ ekziston $x \in D(f)$ me
$0 < |x - a| < \delta$ dhe $|f(x) - L| \geq \varepsilon_0$.

Marrim $\delta = \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ dhe gjejmë $x_n$ me

$$0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}, \qquad |f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0.$$

Atëherë $x_n \to a$, $x_n \neq a$, por $f(x_n) \not\to L$: kundërshtim me Hajnen.

# Gabime të shpeshta me ε–δ

**1** $\delta$ varet nga $x$: "marrim $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|x+2|}$". Për funksionin, pikën dhe limitin e fiksuar, $\delta$ mund të varet nga $\varepsilon$, **jo** nga $x$.

**2** Harrohet kushti $0 < |x-a|$: atëherë do të kërkohej edhe $|f(a) - L| < \varepsilon$, gjë që përkufizimi nuk e kërkon.

**3** "E provova për $\varepsilon = 0{,}1$ dhe $\varepsilon = 0{,}01$." Kjo nuk është provë: duhet për **çdo** $\varepsilon > 0$.

**4** Mendohet që $\delta$ është i vetëm. Nëse një $\delta$ bën, çdo $\delta$ më i vogël pozitiv bën gjithashtu.

**5** Pjesëtohet me $|x-3|$ pa e kufizuar nga poshtë. Duhet një kufizim ndihmës që e mban emëruesin larg $0$-s; këtu zgjodhëm $\delta \le 1$.

**6** Ngatërrohet radha: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ (e saktë) nuk është e njëjtë me $\exists \delta > 0\ \forall \varepsilon > 0$ (shumë më e fortë).

# IV

# Limitet e njëanshme

Afrimi vetëm nga e majta ose vetëm nga e djathta

# Limiti i majtë dhe limiti i djathtë

**LIMITI I MAJTË**

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D(f)$:
$a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$

*$a$ duhet të jetë pikë limite e $D(f) \cap (-\infty, a)$. Me vargje: vetëm $x_n < a$.*

**LIMITI I DJATHTË**

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

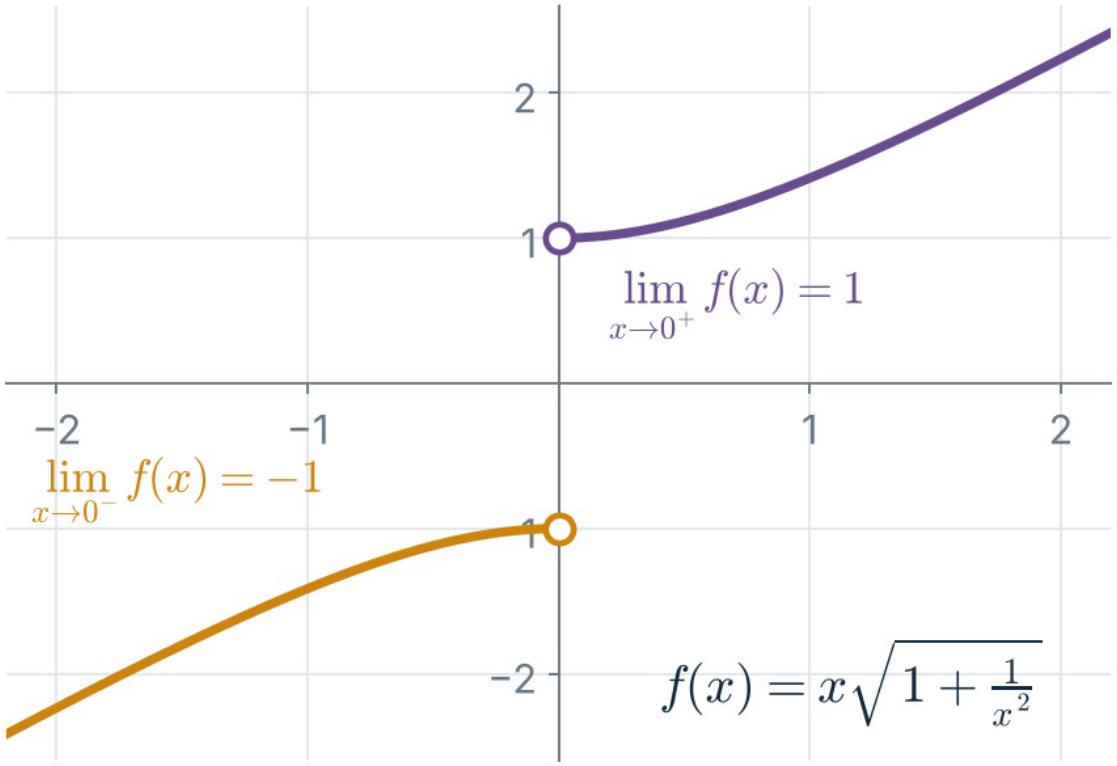
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D(f)$:
$a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$

*$a$ duhet të jetë pikë limite e $D(f) \cap (a, +\infty)$. Me vargje: vetëm $x_n > a$.*

**TEOREMË** Nëse $a$ është pikë limite e bashkësisë së përcaktimit **nga të dyja anët**, atëherë:
$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff$ ekzistojnë të dy limitet e njëanshme dhe $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L.$

**IDEJA KYÇE** Mënyra më e shpejtë për të treguar që një limit **nuk ekziston**: dy limite të njëanshme të ndryshme.
*Teksti bazë: II.9, f. 95–97.*

# Shembull: dy limite të njëanshme të ndryshme




**USHTRIM I ZGJIDHUR** *(Hoxha & Stringa, ushtrimi 1.3, f. 71)*

$$f(x) = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{|x|}$$

**Për** $x<0$**:** $f(x) = -\sqrt{x^2+1} \to -1$. **Për** $x>0$**:** $f(x) = \sqrt{x^2+1} \to 1$.

**Si gjendet** $\delta$ **(djathtas):**

$|f(x)-1| = \sqrt{x^2+1}-1 < \varepsilon \iff x^2 < (1+\varepsilon)^2 - 1$,

pra

$$\delta = \sqrt{(1+\varepsilon)^2-1}.$$

Majtas, njësoj me $|x|$.

**IDEJA KYÇE** $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 \neq 1 = \lim_{x\to 0^+} f(x)$, prandaj $\lim_{x\to 0} f(x)$ nuk ekziston. Kërcimi vjen nga $|x|$, që “fsheh” shenjën e $x$-it.

# Shembuj: kërcime dhe skaji i bashkësisë D(f)

**FUNKSIONI SHENJË**

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Për $x \neq 0$: $\operatorname{sgn} x = \dfrac{|x|}{x}$.

$\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1,$

$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1.$

*(Hoxha & Stringa, ushtrimi 2.20, f. 87)*

**KËRCIM NË PRAG**

$$f(x) = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}}$$

$x \to 1^-$: $2^{\frac{1}{x-1}} \to 0$, $f(x) \to 1$.

$x \to 1^+$: $2^{\frac{1}{x-1}} \to +\infty$,

$f(x) \to 0$.

Limitet e njëanshme janë të ndryshme.

*(Hoxha & Stringa, ushtrimi 2.17 h, f. 86)*

**SKAJI I BASHKËSISË D(f)**

$f(x) = \sqrt{x}, \qquad D(f) = [0, +\infty)$

Në $a = 0$ mund të afrohemi vetëm nga e djathta:

$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0.$

Limiti i majtë nuk ka kuptim. Sipas përkufizimit relativ ndaj $D(f) = [0, +\infty)$ shkruajmë edhe $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$: afrimi realizohet vetëm nga e djathta.

**NË INFORMATIKË** Funksionet me kërcim në një prag janë të shpeshta në informatikë: kërcimi $0 \to 1$ përdoret si funksion aktivizimi te neuronet artificiale dhe te klasifikuesit. Limitet e njëanshme përshkruajnë saktë sjelljen pranë pragut.

# V

# Pafundësia

Limitet kur x → ±∞ dhe limitet e pafundme

# Limiti kur x shkon në pafundësi

**PËRKUFIZIM (D(f) i pakufizuar nga sipër)**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0\ \forall x \in D(f):$$

$$x > N \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon.$$

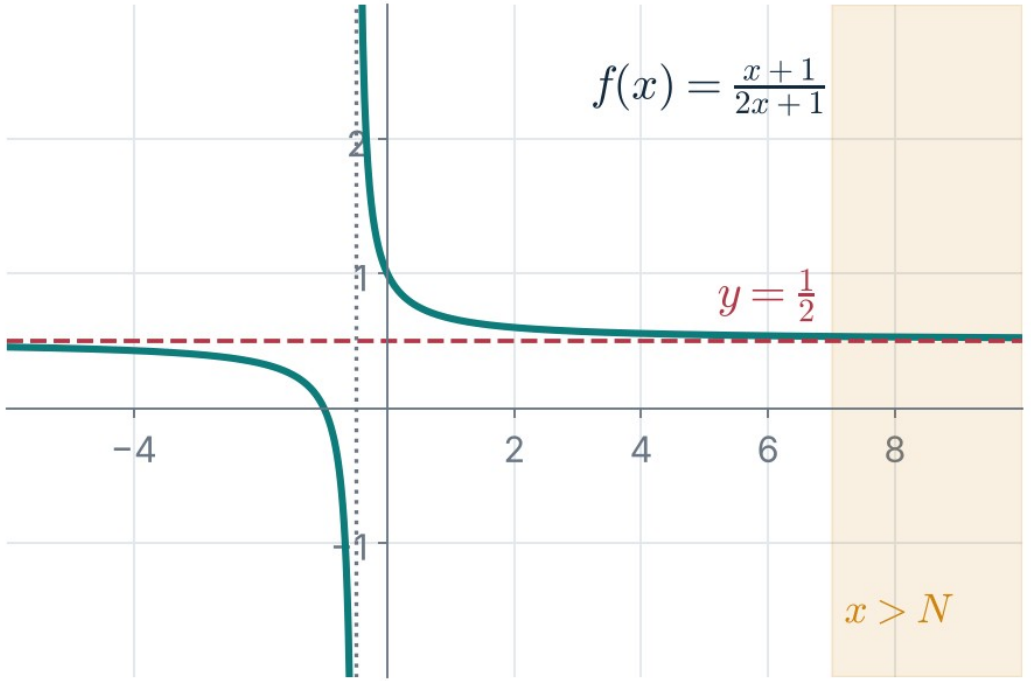
*Për $x \to -\infty$: $x < -N$, me $D(f)$ të pakufizuar nga poshtë. Teksti bazë përdor $|x| > N$ për të dy drejtimet njëherësh (Përkufizimi 3, f. 80).*

**SHEMBULL** ***(Hoxha & Stringa, ushtrimi 1.1 c, f. 69)***

Provojmë njëherësh për $x \to +\infty$ dhe $x \to -\infty$ (me $|x| > N$):

$$\left|\frac{x+1}{2x+1} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2\,|2x+1|}.$$

Për $|x| > N = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\varepsilon}$ kemi $|2x+1| \geq 2|x| - 1 > \frac{1}{2\varepsilon}$, pra diferenca është $< \varepsilon$.




**IDEJA KYÇE** Grafiku i afrohet drejtëzës $y = \frac{1}{2}$: **asimptota horizontale**.

# Limitet e pafundme

**PËRKUFIZIM** ($a$ **pikë limite e** $D(f)$**)**

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D(f):$$

$$0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow\ f(x) > M.$$

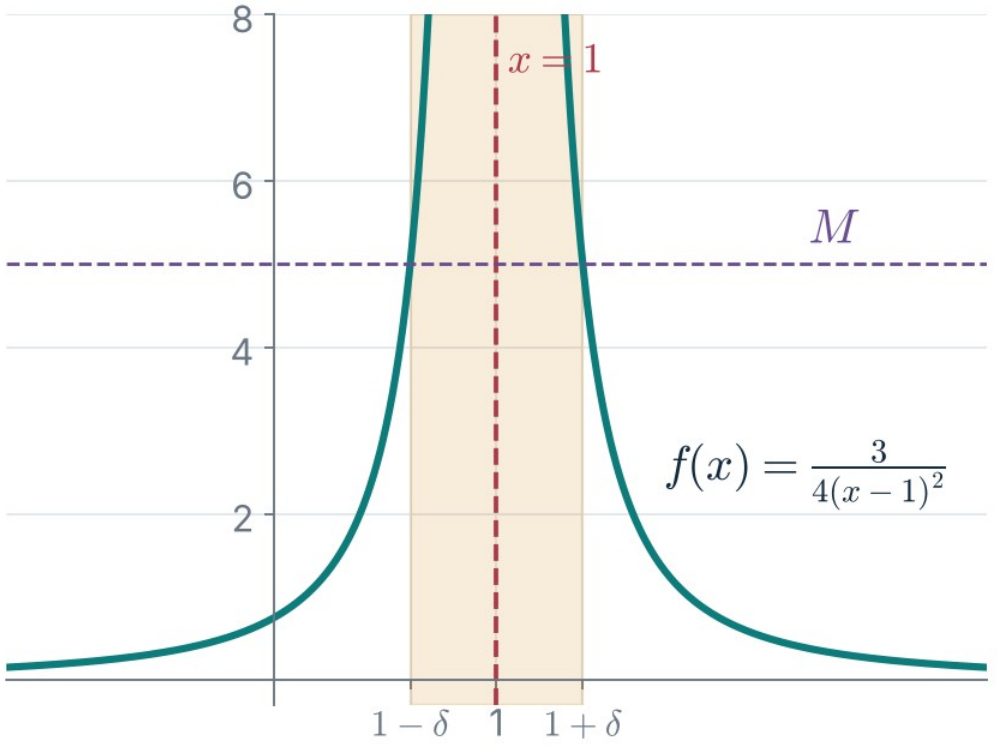
*Për* $-\infty$*:* $f(x) < -M$.

**SHEMBULL** ***(Hoxha & Stringa, ushtrimi 1.1 b, f. 68)***

$\lim_{x\to 1} \dfrac{3}{4(x-1)^2} = +\infty$. Për $M > 0$:

$$\frac{3}{4(x-1)^2} > M \iff 0 < |x-1| < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{M}}.$$

Pra $\delta = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{M}}$. Sa më i madh $M$, aq më i vogël $\delta$.




**KUJDES** Konventa: $f \to +\infty$, $f \to -\infty$, ose $|f| \to +\infty$. Teksti bazë (f. 83) shkruan $\lim f = \infty$ për $|f(x)| > M$.

# Një skemë për të gjitha rastet: zonat rrethuese

| Kur | Zona rrethuese e pikës ku shkon x | Zona rrethuese e limitit | Shembull |
|---|---|---|---|
| $x \to a,\ f \to L$ | $0 < \lvert x-a\rvert < \delta$ (zonë e shpuar) | $\lvert f(x)-L\rvert < \varepsilon$ | $\lim_{x\to 2}(5x+3) = 13$ |
| $x \to a,\ f \to +\infty$ | $0 < \lvert x-a\rvert < \delta$ | $f(x) > M$ | $\lim_{x\to 1} \dfrac{3}{4(x-1)^2} = +\infty$ |
| $x \to +\infty,\ f \to L$ | $x > N$, d.m.th. $(N, +\infty)$ | $\lvert f(x)-L\rvert < \varepsilon$ | $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x+1}{2x+1} = \dfrac{1}{2}$ |
| $x \to -\infty,\ f \to +\infty$ | $x < -N$, d.m.th. $(-\infty, -N)$ | $f(x) > M$ | $\lim_{x\to -\infty} \sqrt[3]{2-x} = +\infty$ |

**IDEJA KYÇE** Skema: **për çdo zonë rrethuese $V$ të limitit ekziston një zonë rrethuese $U$ e pikës së afrimit**, e tillë që çdo $x \in D(f) \cap U$ (me $x \neq a$) ka $f(x) \in V$.

Shembulli i fundit *(Hoxha & Stringa, ushtrimi 1.1 d, f. 69)*: $\sqrt[3]{2-x} > M \iff x < 2 - M^3$. Marrim $N = \max\{1,\ M^3 - 2\} > 0$; atëherë $x < -N \Rightarrow \sqrt[3]{2-x} > M$.

# Asimptotat: limitet në gjuhën e grafikut

**ASIMPTOTË VERTIKALE**

Drejtëza $x = a$ është asimptotë vertikale nëse të paktën njëri nga limitet e njëanshme është i pafundëm:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{ose} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty.$$

Shembull: $x = 1$ për $\dfrac{3}{4(x-1)^2}$.

**ASIMPTOTË HORIZONTALE**

Drejtëza $y = L$ është asimptotë horizontale nëse $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ ose $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$.

Shembull: $y = \dfrac{1}{2}$ për $\dfrac{x+1}{2x+1}$. *(Teksti bazë: III.8, f. 136)*

**KUJDES** Grafiku **mund** ta presë asimptotën horizontale (p.sh. $\dfrac{\sin x}{x}$ e pret $y = 0$ pafundësisht herë). Asimptota përshkruan sjelljen kur $x \to \pm\infty$, jo një kufi të ndaluar.

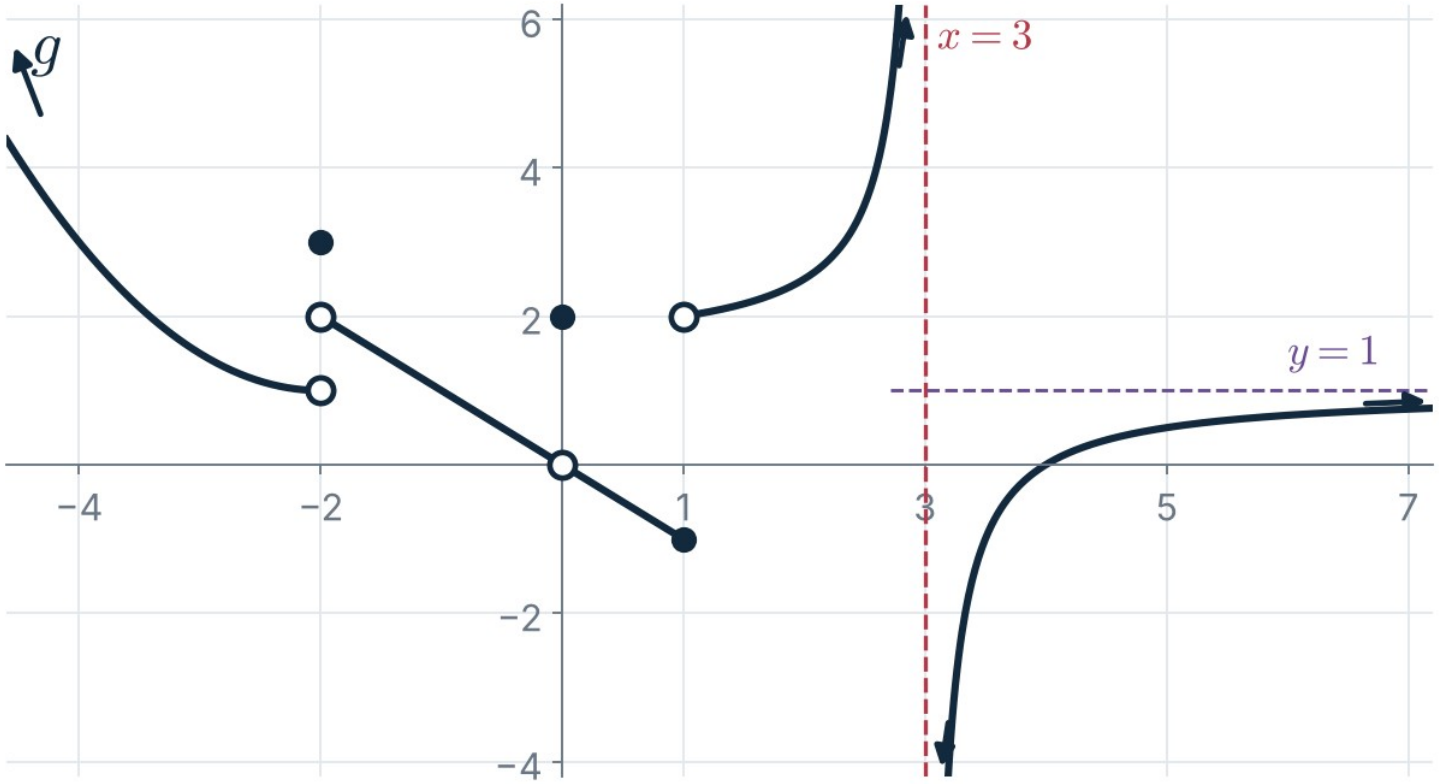
**NË INFORMATIKË** Te grafikët e trajnimit të një modeli: **nëse** saktësia stabilizohet drejt një vlere kufi, kjo vlerë luan rolin e asimptotës horizontale. Konvergjenca nuk është e garantuar për çdo model.

# VI

# Grafiku dhe informatika

Çfarë na thotë grafiku, çfarë na thotë tabela, çfarë na thotë kompjuteri

# Leximi i limiteve nga grafiku




Supozojmë se degët vazhdojnë sipas shigjetave; vetëm pjesa e dukshme nuk e përcakton sjelljen në ±∞.

**GJENI (si te ushtrimi 1.19)**

1. $\lim_{x\to -2^-} g$, $\lim_{x\to -2^+} g$, $g(-2)$
2. $\lim_{x\to 0} g$ dhe $g(0)$
3. $\lim_{x\to 1^-} g$, $\lim_{x\to 1^+} g$
4. $\lim_{x\to 3^-} g$, $\lim_{x\to 3^+} g$
5. $\lim_{x\to +\infty} g$, $\lim_{x\to -\infty} g$

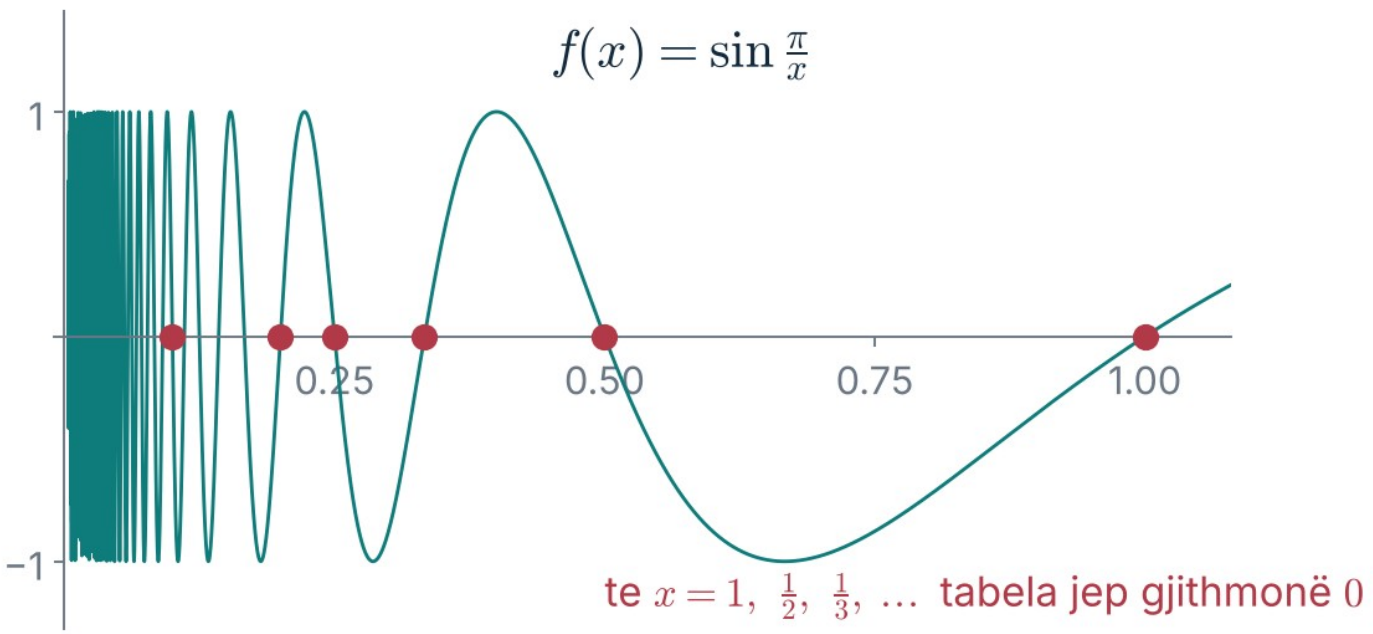
*Rrethi bosh: pika nuk i përket grafikut. Rrethi plot: vlera e funksionit. Shigjetat: dega vazhdon në atë drejtim.*

# Përgjigje: leximi nga grafiku

| Pika | Majtas | Djathtas | Limiti | Vlera | Çfarë ndodh |
|---|---|---|---|---|---|
| $-2$ | 1 | 2 | nuk ekziston | 3 | kërcim |
| $0$ | 0 | 0 | 0 | 2 | limiti ekziston, por $\neq g(0)$ |
| $1$ | $-1$ | 2 | nuk ekziston | $-1$ | kërcim |
| $3$ | $+\infty$ | $-\infty$ | nuk ekziston | — | asimptotë vertikale |
| $+\infty$ | — | — | 1 | — | asimptotë horizontale $y = 1$ |
| $-\infty$ | — | — | $+\infty$ | — | rritje pa kufi |

**IDEJA KYÇE** Në $x = 0$, vlerat pranë $0$-s afrohen te $0$, ndërsa vlera e funksionit është vendosur $g(0) = 2$. Limiti dhe vlera janë dy koncepte të ndryshme.

# Kurthi i tabelave




**EKSPERIMENTI**

$$f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$$

Për $x = 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{10}$ kemi matematikisht $\sin(n\pi) = 0$.

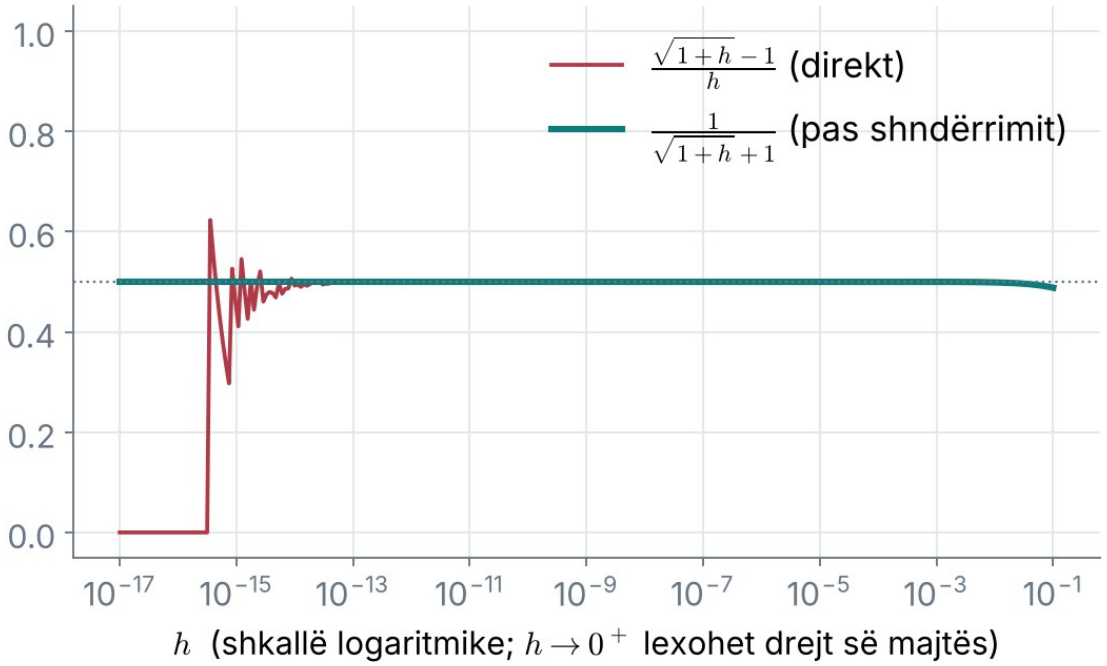
Përfundim i nxituar: "limiti është $0$".

*Në kompjuter dalin vlera shumë të vogla jozero, p.sh. $1{,}2 \cdot 10^{-16}$, për shkak të rrumbullakimit të $\pi$.*

**POR**

Për $y_n = \dfrac{2}{4n+1} \to 0$ kemi $f(y_n) = \sin \dfrac{(4n+1)\pi}{2} = 1 \to 1$. Me dy vargje, sipas Hajnes, limiti nuk ekziston. Tabela përmbante vetëm pika ku funksioni është $0$. *Figura është ilustruese: pranë $0$ ka pafundësisht shumë lëkundje.*

# Kompjuteri dhe h → 0




**LIMITI I SAKTË**

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h} = \frac{1}{2}$$

**LLOGARITJA E DREJTPËRDREJTË**

| $h$ | rezultati |
|---|---|
| $10^{-8}$ | $0{,}49999999696$ |
| $10^{-12}$ | $0{,}50004445029$ |
| $10^{-15}$ | $0{,}44408920985$ |
| $10^{-16}$ | $0{,}0$ |

**NË INFORMATIKË** (1) **Humbja e shifrave:** $\sqrt{1+h} \approx 1$, dhe zbritja fshin shifrat e sakta. (2) **Rrumbullakimi:** në aritmetikën standarde me precizion të dyfishtë (rrumbullakim te më i afërti), për $0 < h < 1{,}1 \cdot 10^{-16}$ shuma $1+h$ rrumbullakohet në $1$, prandaj llogaritja e drejtpërdrejtë jep $0$. Për $h \geq -1$, $h \neq 0$: $\dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{1+h}+1}$; kjo formë shmang zbritjen, dhe vlerat e saj afrohen te $0{,}5$ kur $h \to 0$.

# Eksperimenti në Python

**KODI**

```
import math
for h in [1e-2, 1e-8, 1e-12, 1e-16]:
    naiv = (math.sqrt(1+h) - 1) / h     # drejtpërdrejt
    mire = 1 / (math.sqrt(1+h) + 1)    # pas racionalizimit
    print(h, naiv, mire)
```

**REZULTATI**

```
0.01    0.498756211208895    0.4987562112089027
1e-08   0.4999999969612645   0.49999999875
1e-12   0.5000444502911705   0.499999999999875
1e-16   0.0                  0.5
```

**IDEJA KYÇE** Për $h$ tepër të vogël, llogaritja e drejtpërdrejtë mund të japë $0$, si pasojë e rrumbullakimit; kjo **nuk** është limiti matematikor. **Pyetje:** pse dy shprehje algjebrikisht të barabarta japin rezultate të ndryshme në kompjuter?

# Limiti në pafundësi dhe rendi i rritjes

**KOHA E EKZEKUTIMIT**

Një algoritëm kryen $T(n) = 3n^2 + 5n + 7$ veprime, $n \in \mathbb{N}$. Atëherë

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T(n)}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(3 + \frac{5}{n} + \frac{7}{n^2}\right) = 3.$$

Termat $5n$ dhe $7$ nuk ndryshojnë rendin asimptotik, megjithëse ndikojnë në vlerën konkrete të kostos.

**KLASIFIKIMI ME LIMIT**

$T(n) = \Theta(g(n))$ do të thotë: për $n$ mjaft të madh, $c_1 g(n) \le T(n) \le c_2 g(n)$ me $c_1, c_2 > 0$.

Për $T(n), g(n) > 0$, nëse $\lim_{n\to\infty} \frac{T(n)}{g(n)} = c$:

- $0 < c < \infty$: $T(n) = \Theta(g(n))$;
- $c = 0$: $T$ rritet më ngadalë se $g$;
- $c = +\infty$: $T$ rritet më shpejt se $g$.

**NË INFORMATIKË** Le të jenë $T_1(n) = \Theta(n^2)$ dhe $T_2(n) = \Theta(2^n)$ dy algoritme për **të njëjtin problem**, me të njëjtin model kostoje dhe të njëjtin lloj analize (p.sh. rasti më i keq). Meqë $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$, për $n$ mjaft të madh i pari është më i shpejtë.

# VII

# Përmbledhje

Çfarë duhet të dini dhe çfarë vjen në leksionin e ardhshëm

# Përmbledhje: konceptet kryesore

*Në formulat më poshtë $x \in D(f)$. Për afrimin te një pikë e fundme, $a$ është pikë limite e bashkësisë së përcaktimit; për afrimin në pafundësi, bashkësia e përcaktimit është i pakufizuar në drejtimin përkatës.*

| Koncepti | Si shkruhet | Si përdoret |
|---|---|---|
| Limiti (Hajne) | $\forall (x_n) \subset D(f) \setminus \{a\},\ x_n \to a:\ f(x_n) \to L$ | teoremat e vargjeve; mosekzistencë me dy vargje |
| Limiti (Koshi) | $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0:\ 0 < \lvert x - a \rvert < \delta \Rightarrow \lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon$ | prova e një limiti të dhënë |
| Limitet e njëanshme | $x \to a^-,\ x \to a^+$ | kur $a$ është pikë limite nga të dyja anët: limiti ekziston $\iff$ të dyja ekzistojnë dhe janë të barabarta |
| Limiti në $+\infty$ / $-\infty$ | $\forall \varepsilon > 0\, \exists N > 0:\ x > N$ (përkatësisht $x < -N$) $\Rightarrow \lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon$ | asimptota horizontale, rendi i rritjes |
| Limiti $\pm\infty$ | $\forall M > 0\, \exists \delta > 0:\ 0 < \lvert x - a \rvert < \delta \Rightarrow f(x) > M$ (për $-\infty$: $f(x) < -M$) | asimptota vertikale |

**IDEJA KYÇE** Leksioni i ardhshëm: **Llogaritja e limiteve** me rregulla, format e pacaktuara $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, limiti $\frac{\sin x}{x}$ dhe teorema e dy policëve.

# Kontroll përfundimtar

**TRI PYETJE**

1. **Limit apo vlerë?** $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ për $x \neq 3$ dhe $f(3) = 0$. Sa janë $\lim_{x \to 3} f(x)$ dhe $f(3)$?
2. **Zgjedhja e $\delta$.** Për $\lim_{x \to 5}(4x - 1) = 19$, cili $\delta$ funksionon për $\varepsilon = 0{,}2$? Po për $\varepsilon$ çfarëdo?
3. **Tabela.** Një tabelë jep $f(0{,}1) = f(0{,}01) = f(0{,}001) = 1$. A mund të themi me siguri që $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$? Pse?

Shkruani përgjigjet individualisht, pastaj krahasoni me shokun.

# Përgjigje: kontrolli përfundimtar

**PËRGJIGJE**

1. Për $x \neq 3$: $f(x) = x + 3$, pra $\lim_{x \to 3} f(x) = 6$, ndërsa $f(3) = 0$. Limiti dhe vlera janë të ndryshëm.
2. $|4x - 1 - 19| = 4|x - 5| < \varepsilon \iff |x - 5| < \dfrac{\varepsilon}{4}$. Për $\varepsilon = 0{,}2$: $\delta = 0{,}05$ (ose çdo numër më i vogël pozitiv). Në përgjithësi: $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4}$.
3. **Jo.** Kundërshembull i drejtpërdrejtë: $f(x) = 1$ për $x \in \{0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001\}$ dhe $f(x) = 0$ për çdo $x$ tjetër. Tabela plotësohet, por për $|x| < 0{,}0005$ funksioni është identikisht $0$, pra $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. Tri vlera nuk e përcaktojnë limitin.

# Gabime tipike

**1** “$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ gjithmonë.” Vlen vetëm për funksionet e vazhdueshme në $a$.

**2** “Nëse $f(a)$ nuk ekziston, edhe limiti nuk ekziston.” Kundërshembull: $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ në $1$.

**3** “Tabela tregon që limiti është $0$.” Kundërshembull: $\sin\dfrac{\pi}{x}$ në pikat $\dfrac{1}{n}$.

**4** Llogaritet vetëm njëri limit i njëanshëm dhe shpallet si limit.

**5** $\delta$ që varet nga $x$, ose “prova” me disa vlera të $\varepsilon$.

**6** “Limiti është $+\infty$, pra është një numër.” $\pm\infty$ përshkruan sjelljen e funksionit, nuk janë numra realë.

# Ushtrime për punë të pavarur

## A. BAZË

**1.** Me tabelë vlerash, parashikoni $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$ dhe $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$. *(si te 1.7–1.8)*

**2.** Nga grafiku: gjeni limitet e njëanshme të $\dfrac{|x-1|}{x-1}$ në $1$ dhe të $\dfrac{x+1}{x-3}$ në $3$. *(1.26)*

**3.** Skiconi një funksion me $\lim_{x\to 3^-} f = 4$, $\lim_{x\to 3^+} f = 2$, $f(3) = 1$. *(si te 1.21)*

## B. PROVA ME PËRKUFIZIM

**4.** Provoni me $\varepsilon$–$\delta$: $\lim_{x\to -2}\dfrac{x}{3} = -\dfrac{2}{3}$ dhe $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$. *(1.22 a, e)*

**5.** Provoni: $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{9x-3}{3x} = 3$ dhe $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2} = +\infty$. *(si te 1.23–1.24)*

**6.** Me dy vargje, tregoni që $\lim_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ nuk ekziston.

## C. THELLIM DHE ZBATIM

**7.** Gjeni $\delta$ të tillë që $0 < |x-2| < \delta \Rightarrow \left|\dfrac{1}{x} - 0{,}5\right| < 0{,}2$. *(1.10)*

**8.** Krahasoni me limit $T_1(n) = n\log_2 n$ dhe $T_2(n) = n^2$. Cili rritet më shpejt?

Numrat në kllapa: ushtrimet përkatëse te Hoxha & Stringa, f. 72–78.

# Zgjidhje orientuese

### A. BAZË

**1.** $4$ (sepse $x+2 \to 4$); $\dfrac{1}{4}$ (racionalizim: $\dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2}$).

**2.** $\dfrac{|x-1|}{x-1}$: majtas $-1$, djathtas $1$, limiti nuk ekziston. $\dfrac{x+1}{x-3}$: majtas $-\infty$, djathtas $+\infty$.

**3.** Dy degë që mbarojnë me rrethe bosh në $(3,4)$ dhe $(3,2)$, dhe pika e plotë $(3,1)$.

### C. THELLIM DHE ZBATIM

**7.** $\left|\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{|x-2|}{2|x|}$. Për $0<|x-2|<1$: $|x|>1$, pra kjo është $< \dfrac{|x-2|}{2}$; mjafton $\delta = \min\{1;\ 0{,}4\} = 0{,}4$.

**8.** $\dfrac{n\log_2 n}{n^2} = \dfrac{\log_2 n}{n} \to 0$: $T_2$ rritet më shpejt.

### B. PROVA ME PËRKUFIZIM

**4.** $\left|\dfrac{x}{3}+\dfrac{2}{3}\right| = \dfrac{|x+2|}{3}$: $\delta = 3\varepsilon$. $|x^2-4|<5|x-2|$ për $0<|x-2|<1$: $\delta = \min\{1, \dfrac{\varepsilon}{5}\}$.

**5.** $\left|\dfrac{9x-3}{3x}-3\right| = \dfrac{1}{|x|} < \varepsilon$ për $x > N = \dfrac{1}{\varepsilon}$. $\dfrac{1}{x^2} > M \iff 0<|x|<\dfrac{1}{\sqrt{M}}$: $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{M}}$.

**6.** $x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$: $\cos\dfrac{1}{x_n} = 1$; $y_n = \dfrac{1}{(2n+1)\pi}$: $\cos\dfrac{1}{y_n} = -1$. Limitet $1 \neq -1$.

# Literatura


**L. Mukli, V. Muka, O. Hysa** Matematika 1, Tiranë, 2013, ISBN 978-99956-54-50-4 (teksti bazë). Kreu II: §5 (f. 75–86), §9 (f. 95–97); Kreu III, §8.

**E. Hoxha, A. Stringa** Ushtrime të Analizës Matematike 1, ISBN 978-9928-137-26-5. Kapitulli IV, §1.

**J. Stewart** Calculus: Early Transcendentals, bot. 8, Cengage, 2015. Seksionet 2.2–2.4 dhe 2.6.

**M. Spivak** Calculus, bot. 4, Publish or Perish, 2008. Kreu 5: Limits.

**N. J. Higham** Accuracy and Stability of Numerical Algorithms, bot. 2, SIAM, 2002. Kreu 1.

**T. H. Cormen et al.** Introduction to Algorithms, bot. 4, MIT Press, 2022. Kreu 3: rendi i rritjes.