UNIVERSITETI I SHKODRËS «LUIGJ GURAKUQI» · FAKULTETI I SHKENCAVE TË NATYRËS

DEPARTAMENTI I MATEMATIKËS

Seminar: Derivati i funksionit

30 ushtrime me zgjidhje hap pas hapi

Prof. As. Dr. Siditë Duraj

Analizë Matematike I · Bachelor në Informatikë, viti I · 2026–2027

HYRJE

Si ta përdorni këtë seminar

Ushtrimet janë ndarë në gjashtë blloqe, sipas leksionit:

A. Derivati me përkufizim (1–5)
B. Tangjentja dhe normalja (6–10)
C. Rregullat e veprimeve (11–15)
D. Funksioni i përbërë dhe i anasjelltë (16–20)
E. Derivimi logaritmik dhe implicit (21–25)
F. Diferenciali, rendet e larta, informatika (26–30)

Metoda. Pas çdo slajdi me ushtrime vijnë slajdet me zgjidhje. Zgjidhini vetë përpara se t'i shihni.

Shkruani gjithmonë bashkësinë ku vlen formula e derivatit.

Ushtrime të ngjashme: Hoxha–Stringa, Ushtrime të Analizës Matematike 1, kreu për derivatin.

Ushtrime 1–5

1. Me përkufizim, gjeni derivatin e $f(x) = x^3$ në një pikë $x \in \mathbb{R}$.
2. Me përkufizim, gjeni derivatin e $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ për $x > 0$.
3. A është $f(x) = x\,|x|$ e derivueshme në $x = 0$? Nëse po, sa është $f'(0)$?
4. A është $f(x) = |x^2 - 1|$ e derivueshme në $x = 1$? Arsyetoni me derivatet e njëanshme.
5. Gjeni a dhe b që funksioni $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \le 1, \\ ax + b, & x > 1 \end{cases}$ të jetë i derivueshëm në $x = 1$.

Zgjidhje 1–3

1. $\Delta y = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\,\Delta x + (\Delta x)^2 \xrightarrow[\Delta x\to 0]{} 3x^2.$$

> $(x^3)' = 3x^2.$

2. Bashkojmë thyesat dhe shumëzojmë me të konjuguarin:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+\Delta x}}{\Delta x\sqrt{x}\sqrt{x+\Delta x}} = \frac{-1}{\sqrt{x}\sqrt{x+\Delta x}\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+\Delta x}\right)}.$$

Kur $\Delta x \to 0$: $\dfrac{-1}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x}}$.

> $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}},\ x > 0.$

3. $f(0) = 0$ dhe

$$\frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{\Delta x\,|\Delta x|}{\Delta x} = |\Delta x| \xrightarrow[\Delta x\to 0]{} 0.$$

> Po: $f'(0) = 0$, edhe pse $|x|$ vetë nuk është e derivueshme në 0.

Zgjidhje 4–5

4. $f(1) = 0$. Pranë 1: $f(x) = 1 - x^2$ për $x < 1$ dhe $f(x) = x^2 - 1$ për $x > 1$.

$$f'_-(1) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{1 - (1+\Delta x)^2}{\Delta x} = -2,$$

$$f'_+(1) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{(1+\Delta x)^2 - 1}{\Delta x} = 2.$$

$-2 \neq 2$: f **nuk** është e derivueshme në 1 (pikë këndore).

5. Vazhdueshmëria: $a + b = f(1) = 1$.

Derivatet e njëanshme:

$$f'_-(1) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{(1+\Delta x)^3 - 1}{\Delta x} = 3,$$

$$f'_+(1) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{a(1+\Delta x) + b - 1}{\Delta x} = a.$$

$a = 3$, $b = 1 - a = -2$. Atëherë $y = 3x - 2$ është tangjentja ndaj $y = x^3$ në $(1, 1)$.

Ushtrime 6–10

6. Shkruani ekuacionet e tangjentes dhe të normales ndaj $y = x^3 - 3x$ në pikën me abshisë 2.
7. Gjeni tangjenten ndaj $y = \ln x$ që kalon nga origjina e koordinatave.
8. Gjeni tangjenten ndaj $y = x^2$ që është paralele me drejtëzën $y = 4x - 1$.
9. Shkruani ekuacionin e normales ndaj $y = \sqrt{x}$ në pikën me abshisë 4.
10. Në cilat pika tangjentja ndaj $y = x^3 - 3x^2 + 1$ është horizontale?

Zgjidhje 6–8

6. $f(2) = 8 - 6 = 2$; $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f'(2) = 9$.

Tangjentja: $y - 2 = 9(x - 2)$, pra $y = 9x - 16$.

Normalja: $y - 2 = -\dfrac{1}{9}(x - 2)$, pra $y = -\dfrac{1}{9}\,x + \dfrac{20}{9}$.

7. Tangjentja në $(t, \ln t)$, $t > 0$: $y - \ln t = \dfrac{1}{t}(x - t)$.

Kalon nga $(0, 0)$: $-\ln t = -1$, pra $t = e$.

$y = \dfrac{1}{e}\,x$, e takon grafikun në $(e, 1)$.

8. Paralele me $y = 4x - 1$ do të thotë koeficient këndor 4:

$$f'(x) = 2x = 4 \implies x = 2, \quad f(2) = 4.$$

$y - 4 = 4(x - 2)$, pra $y = 4x - 4$.

Mos e ngatërroni: «paralele» kërkon koeficient të njëjtë; «pingule» kërkon prodhim -1.

Zgjidhje 9–10

9. $f(4) = 2$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $f'(4) = \dfrac{1}{4}$.

Koeficienti i normales: $-\dfrac{1}{f'(4)} = -4$.

$y - 2 = -4(x - 4)$, pra $y = -4x + 18$.

10. Tangjentja horizontale $\iff f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 3x(x-2) = 0 \implies x \in \{0,\ 2\}.$$

$f(0) = 1$, $f(2) = 8 - 12 + 1 = -3$.

Pikat $(0, 1)$ dhe $(2, -3)$; tangjentet $y = 1$ dhe $y = -3$.

Ushtrime 11–15

Gjeni derivatet dhe thjeshtojini sa më shumë.

11. $y = (x^2+1)(x^3-2x)$ (në dy mënyra: me rregullin e prodhimit dhe duke hapur kllapat).
12. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$, $x \neq -1$.
13. $y = x^2 e^{-x}$.
14. $y = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$, $x \neq (2k+1)\pi$.
15. $y = x\ln x - x$, $x > 0$.

Zgjidhje 11–13

11. Me rregullin e prodhimit:

$$\begin{aligned} y' &= 2x(x^3 - 2x) + (x^2 + 1)(3x^2 - 2) \\ &= 5x^4 - 3x^2 - 2. \end{aligned}$$

Duke hapur kllapat: $y = x^5 - x^3 - 2x$, $y' = 5x^4 - 3x^2 - 2$. ✓

$y' = (x^2 - 1)(5x^2 + 2)$.

12.

$$y' = \frac{1 \cdot (x+1) - (x-1) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

13. Prodhim, me $(e^{-x})' = -e^{-x}$ (zinxhiri):

$$y' = 2x\, e^{-x} - x^2 e^{-x} = x(2 - x)\, e^{-x}.$$

Derivati është 0 për $x = 0$ dhe $x = 2$: aty grafiku ka tangjente horizontale. Këto pika i studiojmë në leksionin e ardhshëm (ekstremumet).

Zgjidhje 14–15

14. Rregulli i herësit, dhe meqë $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$:

$$y' = \frac{\cos x\,(1+\cos x) - \sin x\,(-\sin x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x}.$$

Kontroll: $\dfrac{\sin x}{1+\cos x} = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ dhe $\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)' = \dfrac{1}{2\cos^2\dfrac{x}{2}} = \dfrac{1}{1+\cos x}$. ✓

15.

$$y' = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x} - 1 = \ln x.$$

$(x\ln x - x)' = \ln x$: një «parafunksion» i $\ln x$, që do ta takojmë te integralet.

Ushtrime 16–20

Gjeni derivatet, duke shënuar bashkësinë ku vlen rezultati.

16. $y = (1 + x^2)^{10}$.
17. $y = \ln(\cos x)$.
18. $y = e^{-x^2} \cos 3x$.
19. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$.
20. $y = \arcsin(2x)$.

Zgjidhje 16–18

16. $u = 1 + x^2$, $y = u^{10}$:

$$y' = 10(1+x^2)^9 \cdot 2x = 20x(1+x^2)^9, \quad x \in \mathbb{R}.$$

17. Përcaktohet ku $\cos x > 0$:

$$y' = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\operatorname{tg} x.$$

18. Prodhim + zinxhir dy herë:

$$\begin{aligned} y' &= -2x\, e^{-x^2} \cos 3x - 3e^{-x^2} \sin 3x \\ &= -e^{-x^2}\big(2x \cos 3x + 3 \sin 3x\big). \end{aligned}$$

Gabim tipik: $\left(e^{-x^2}\right)' = e^{-x^2}$ ose $\left(e^{-x^2}\right)' = -x^2 e^{-x^2-1}$. Derivati i eksponentit duhet shumëzuar.

Zgjidhje 19–20

19. $u = \sqrt{x}$, $x \geq 0$; derivohet për $x > 0$:

$$y' = \frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\,(1+x)}.$$

Në $x = 0$ derivati i djathtë është $+\infty$, ashtu si te $\sqrt{x}$.

20. Përcaktohet për $|2x| \leq 1$; derivohet për $|2x| < 1$, pra $|x| < \dfrac{1}{2}$:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - (2x)^2}} \cdot 2 = \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}}.$$

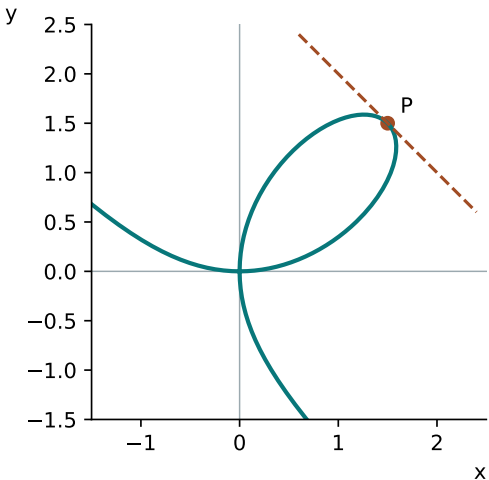
Bashkësia e derivueshmërisë: $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Ushtrime 21–25

21. $y = x^{\sin x},\ x > 0.$
22. $y = (x+1)^{x},\ x > -1.$
23. Me derivim logaritmik: $y = \dfrac{x^2\sqrt{x+1}}{(x-2)^3},\ x > 2.$
24. Gjeni koeficientin këndor të tangjentes ndaj kurbës $x^3 + y^3 = 3xy$ (fleta e Dekartit) në pikën $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$.
25. Shkruani tangjenten ndaj kurbës $x^2 - xy + y^2 = 3$ në pikën $(1, -1)$.

USHTRIMI 24

Fleta e Dekartit

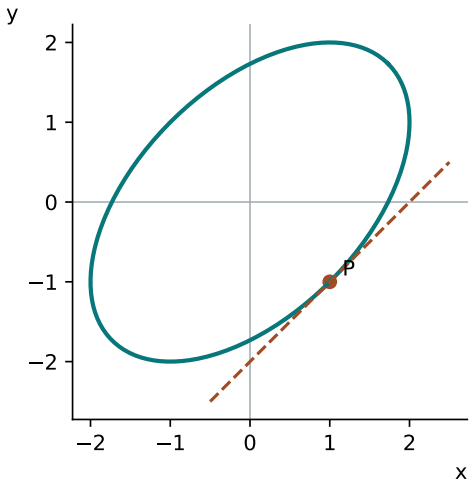


$$x^3 + y^3 = 3xy$$

Ndiqni lakun nga origjina deri te P(3/2, 3/2) dhe përsëri në origjinë. Në P, tangjentja zbret me pjerrësi −1. Ekuacioni i saj është y = 3 − x.

USHTRIMI 25

Elipsa dhe tangjentja e saj



$$x^2 - xy + y^2 = 3$$

Ekuacioni përshkruan një elipsë të rrotulluar. Në pikën P(1, −1), tangjentja ka pjerrësi 1. Kur x rritet me një njësi përgjatë tangjentes, edhe y rritet me një njësi.

Zgjidhje 21–22

21. $\ln y = \sin x \cdot \ln x$. Derivojmë:

$$\frac{y'}{y} = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x},$$

$$y' = x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right).$$

22. $\ln y = x \ln(x+1)$:

$$\frac{y'}{y} = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1},$$

$$y' = (x+1)^x\left(\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}\right).$$

Kontroll në $x = 0$: $y'(0) = 1 \cdot (0+0) = 0$.

Zgjidhje 23

Për $x > 2$ të gjithë faktorët janë pozitivë:

$$\ln y = 2\ln x + \frac{1}{2}\ln(x+1) - 3\ln(x-2).$$

Derivojmë anë për anë:

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{3}{x-2}.$$

$$y' = \frac{x^2\sqrt{x+1}}{(x-2)^3}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{3}{x-2}\right) = -\frac{x\,(x^2+12x+8)}{2\,(x-2)^4\sqrt{x+1}}.$$

Pa logaritëm, do të duheshin rregulli i herësit, i prodhimit dhe zinxhiri njëherësh. Logaritmi i kthen prodhimet në shuma.

Zgjidhje 24–25

24. Pika është në kurbë:
$\frac{27}{8}+\frac{27}{8}=\frac{27}{4}=3\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}$. ✓
Derivojmë, me $y=y(x)$:

$$3x^2+3y^2y'=3y+3xy' \implies y'=\frac{y-x^2}{y^2-x}.$$

Në $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$: $y'=\dfrac{\frac{3}{2}-\frac{9}{4}}{\frac{9}{4}-\frac{3}{2}}=-1.$

25. Kontroll: $1+1+1=3$. ✓

$$2x-y-xy'+2yy'=0 \implies y'=\frac{2x-y}{x-2y}.$$

Në $(1,-1)$: $y'=\dfrac{2+1}{1+2}=1.$

Tangjentja: $y+1=x-1$, pra $y=x-2$.

Ushtrime 26–30

26. Me diferencial, llogaritni përafërsisht $\sqrt[3]{8{,}06}$ dhe vlerësoni gabimin.
27. Me diferencial, llogaritni përafërsisht $\sin 31^\circ$.
28. Gjeni $f^{(n)}(x)$ për $f(x) = x\,e^x$ dhe vërtetojeni me induksion.
29. Tregoni që $y = e^x \sin x$ plotëson ekuacionin $y'' - 2y' + 2y = 0$.
30. **Python.** Me metodën e Njutonit për $f(x) = x^2 - 2$, nga $x_0 = 1$, gjeni $x_1, \dots, x_4$. Sa shifra të sakta të $\sqrt{2}$ fitohen në çdo hap?

Zgjidhje 26–27

26. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $a = 8$, $\Delta x = 0{,}06$:

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \qquad f'(8) = \frac{1}{12}.$$

$$\sqrt[3]{8{,}06} \approx 2 + \frac{1}{12} \cdot 0{,}06 = 2{,}005.$$

Vlera numerike: $2{,}0049876\ldots$; gabimi $\approx 1{,}2 \cdot 10^{-5}$.

27. Këndi në radianë! $a = \dfrac{\pi}{6}$, $\Delta x = \dfrac{\pi}{180}$:

$$\sin 31^\circ \approx \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{180}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0{,}5151.$$

Vlera numerike: $0{,}51504\ldots$

Me $\Delta x = 1$ (gradë) do të merrnim $0{,}5 + 0{,}866 = 1{,}366 > 1$: absurd. Formula $(\sin x)' = \cos x$ vlen vetëm në radianë.

Zgjidhje 28–29

28. $f' = (x+1)e^x$, $f'' = (x+2)e^x$, $f''' = (x+3)e^x$.

> Hamendësim: $f^{(n)}(x) = (x+n)\,e^x$.

Induksion. Për $n = 1$ vlen. Nëse vlen për n:

$$f^{(n+1)} = \big((x+n)e^x\big)' = e^x + (x+n)e^x$$
$$= (x+n+1)e^x. \qquad \blacksquare$$

29.

$$y' = e^x(\sin x + \cos x),$$
$$y'' = e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x)$$
$$= 2e^x \cos x.$$

Prandaj

$$y'' - 2y' + 2y = 2e^x \cos x - 2e^x \sin x$$
$$- 2e^x \cos x + 2e^x \sin x = 0. \checkmark$$

> Ky është një *ekuacion diferencial*; do ta takoni në Analizë II.

Zgjidhje 30

$f(x) = x^2 - 2$, $f'(x) = 2x$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$$

n	x_n	shifra të sakta
1	1,5	1
2	1,41666…	3
3	1,4142156…	6
4	1,41421356237…	12

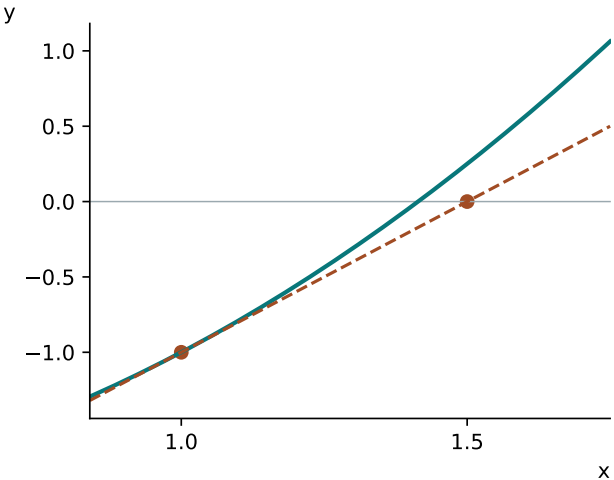
$\sqrt{2} = 1{,}41421356237\ldots$

```
x = 1.0
for n in range(1, 5):
    x = x - (x*x - 2)/(2*x)
    print(n, x)
```

Numri i shifrave të sakta afërsisht **dyfishohet** në çdo hap (konvergjencë kuadratike).

USHTRIMI 30

Si funksionon metoda e Njutonit?



$$f(x) = x^2 - 2$$

Nisemi nga $x_0 = 1$. Tangjentja në pikën $(1, -1)$ pret boshtin horizontal te $x_1 = 1{,}5$. Kjo prerje jep përafrimin e ri të rrënjës.

Punë të mbarë!

Pyetjet i sillni në seminarin e ardhshëm

Prof. As. Dr. Siditë Duraj

Departamenti i Matematikës, FSHN · Universiteti i Shkodrës «Luigj Gurakuqi»