ANALIZË MATEMATIKE I · BACHELOR NË INFORMATIKË, VITI I

Vargjet numerike

Koncepti, mënyrat e dhënies, vetitë, limiti dhe zbatimet në informatikë

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N :\ |a_n - a| < \varepsilon$$

Prof. As. Dr. Siditë Duraj · Departamenti i Matematikës, FSHN · Universiteti i Shkodrës «Luigj Gurakuqi»

Pse vargjet në informatikë?

ALGORITMET ITERATIVE

Çdo cikël `for` ose `while` prodhon një varg vlerash:

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \dots$$

Pyetja kryesore: a ndalon dhe ku konvergjon?

KOMPLEKSITETI

Numri i hapave të një algoritmi është varg:

$$T(1),\ T(2),\ \dots,\ T(n)$$

Rekurrenca $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$ jep $T(n) \approx \log_2 n$.

LLOGARITJA NUMERIKE

Kompjuteri nuk llogarit $\sqrt{2}$, e ose π drejtpërdrejt, por si limit vargjesh:

$$a_n \to \sqrt{2}$$

Gabimi $|a_n - a|$ tregon saktësinë.

IDEJA KYÇE Limiti i vargut është koncepti i parë i analizës që përshkruan **një proces të pafundëm** me mjete të fundme.

Rezultatet e të nxënit

1. Të përkufizojë vargun si funksion $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dhe ta japë me formulë, rekurrencë ose grafik.
2. Të studiojë monotoninë dhe kufizueshmërinë e një vargu me metodat e diferencës dhe të raportit.
3. Të provojë me përkufizimin ε–N që një varg ka limit dhe të gjejë $N(\varepsilon)$.
4. Të zbatojë teoremat për limitet: veprimet, shtrëngimin dhe teoremën e Vajershtrasit.
5. Të njohë limitet themelore: q^n, $\sqrt[n]{n}$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ dhe hierarkinë e rritjes.
6. Të lidhë konvergjencën me algoritmet iterative dhe kriterin e ndalimit.

Struktura e leksionit

I **Koncepti i vargut**
përkufizimi, mënyrat e dhënies, paraqitja grafike, rekurrencat

II **Vetitë e vargjeve**
monotonia, kufizueshmëria, supremumi dhe infimumi

III **Limiti i vargut**
përkufizimi ε–N, divergjenca, teoremat, limitet themelore, kriteri i Koshiut

IV **Ura drejt informatikës**
metoda e Heronit, Fibonaçi, kriteri i ndalimit, krahasimi i pafundësive

V **Përmbledhje dhe ushtrime**
gabimet tipike, ushtrime me zgjidhje

I

Koncepti i vargut

Vargu si funksion i ndryshores natyrore dhe mënyrat për ta dhënë

Përkufizimi i vargut numerik

PËRKUFIZIM

Varg numerik quhet çdo funksion

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \qquad n \mapsto a(n) = a_n.$$

a_n quhet **termi i n-të** (termi i përgjithshëm), n është **indeksi**.

Shënohet $(a_n)_{n\geq 1}$, ose shkurt (a_n).

SHEMBUJ

$$a_n = \frac{1}{n}: \quad 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \dots$$

$$b_n = (-1)^n: \quad -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \dots$$

$$c_n = n^2: \quad 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \dots$$

KUJDES Vargu **nuk** është bashkësi: $(-1)^n$ ka pafundësisht shumë terma, por bashkësia e vlerave të tij është vetëm $\{-1,\ 1\}$. Te vargu ka rëndësi radha.

NË INFORMATIKË Vargu është një tabelë (array) e pafundme: `a[1]`, `a[2]`, `a[3]`, `...`, ku indeksi jep pozicionin.

Mënyrat e dhënies së një vargu

1. ME FORMULË

Termi i përgjithshëm jepet drejtpërdrejt:

$$a_n = \frac{2n+1}{n+3}$$

Çdo term llogaritet menjëherë: $a_{10} = \frac{21}{13}$.

2. ME REKURRENCË

Jepet termi i parë dhe rregulli për kalimin te tjetri:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 1$$

Për a_{10} duhen të gjithë termat paraardhës.

3. ME PËRSHKRIM

Me fjalë, pa formulë të njohur:

p_n = numri i n-të i thjeshtë:

$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ \ldots$

4. ME TABELË

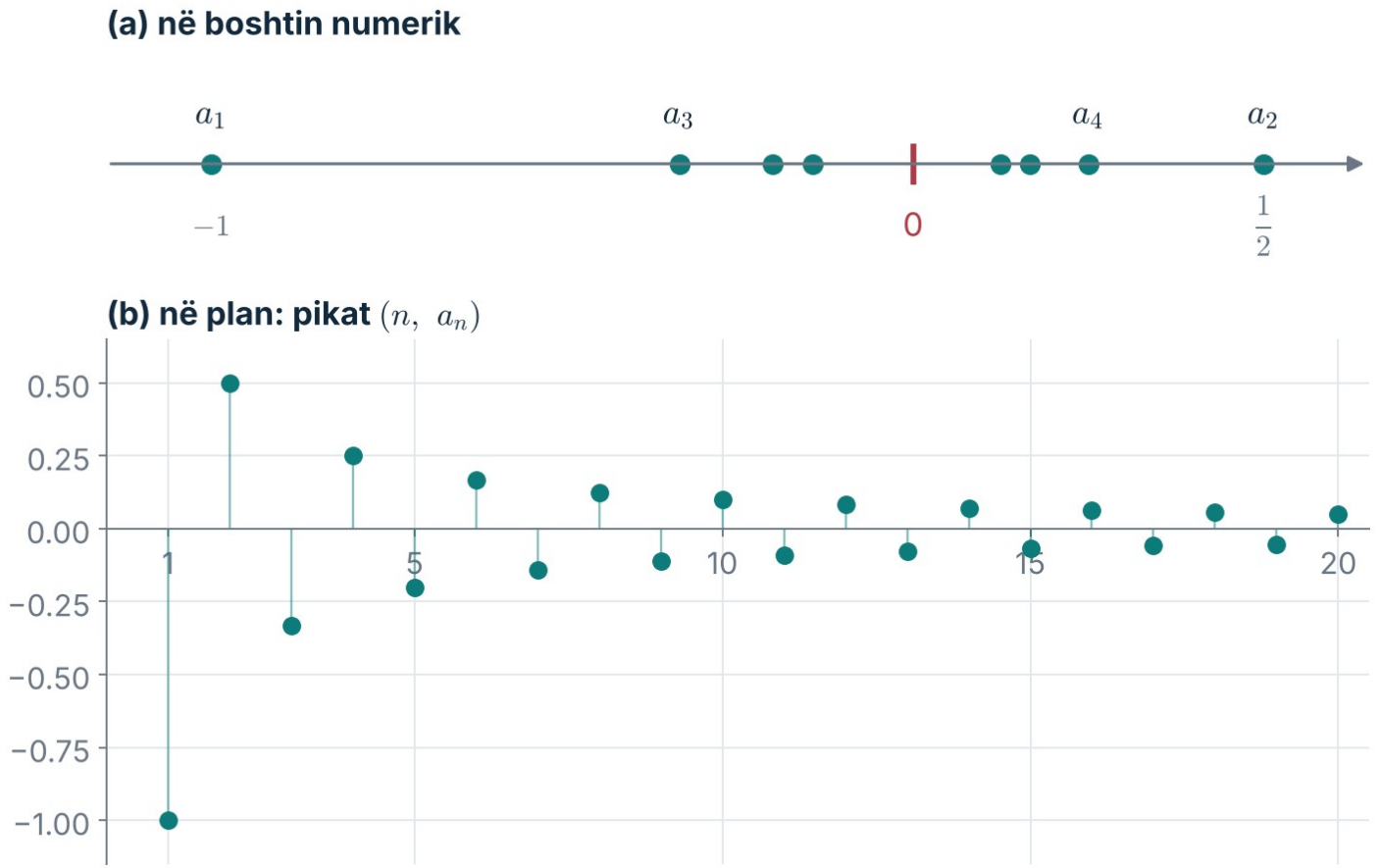
Vlerat e matura ose të llogaritura:

n	1	2	3	4	5
a_n	1	3	7	15	31

Cila formulë i jep këto vlera?

Shembujt 2 dhe 4 janë i njëjti varg: $a_n = 2^n - 1$. Provë me induksion: $a_{n+1} = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$.

Paraqitja grafike e vargut



(a) NË BOSHTIN NUMERIK

Shënohen pikat $a_1, a_2, a_3, \ldots$

Shihet ku **grumbullohen** termat, por humbet radha.

(b) NË PLAN

Pikat $(n,\ a_n)$: grafiku i funksionit $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Pikat **nuk** bashkohen me vijë: ndërmjet n dhe $n+1$ vargu nuk ekziston.

Vargjet rekurrente

Vargu	Rekurrenca	Termat e parë	Formula e drejtpërdrejtë
Aritmetik	$a_{n+1} = a_n + d$	$2,\ 5,\ 8,\ 11, \ldots \quad (d = 3)$	$a_n = a_1 + (n-1)d$
Gjeometrik	$b_{n+1} = q\, b_n$	$3,\ 6,\ 12,\ 24, \ldots \quad (q = 2)$	$b_n = b_1 q^{n-1}$
Fibonaçi	$F_1 = F_2 = 1,$ $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad (n \geq 2)$	$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13, \ldots$	$F_n = \dfrac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$
Heroni	$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{2}{a_n}\right)$	$1;\ 1{,}5;\ 1{,}4167;\ 1{,}41422$	nuk ka formulë të thjeshtë

NË INFORMATIKË Rekurrenca është pikërisht një cikël:

```
a = 1
for n in range(10):  a = 2*a + 1
```

IDEJA KYÇE Te Fibonaçi: $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ (formula e Bineut). Rekurrenca është shpesh më e thjeshtë se formula.

Shuma e termave: aritmetik dhe gjeometrik

VARGU ARITMETIK

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)\, n}{2}$$

Provë (Gausi). Shkruajmë shumën dy herë, në rend të kundërt, dhe mbledhim: çdo çift jep $a_1 + a_n$, dhe çiftet janë n.

VARGU GJEOMETRIK ($q \neq 1$)

$$S_n = b_1 + b_1 q + \cdots + b_1 q^{n-1} = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Provë. $qS_n - S_n = b_1 q^n - b_1$, sepse termat e ndërmjetëm thjeshtohen.

SHEMBULL

$$1 + 2 + \cdots + 100 = \frac{(1 + 100) \cdot 100}{2} = 5050$$

NË INFORMATIKË Numri i nyjeve në një pemë binare të plotë me lartësi h:

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^h = 2^{h+1} - 1$$

II

Vetitë e vargjeve

Monotonia dhe kufizueshmëria, të provuara me metoda të thjeshta

Monotonia e vargut

PËRKUFIZIME

- **rritës:** $a_{n+1} \geq a_n$ për çdo n
- **rreptësisht rritës:** $a_{n+1} > a_n$
- **zbritës:** $a_{n+1} \leq a_n$; **rreptësisht zbritës:** $a_{n+1} < a_n$

IDEJA KYÇE Te funksionet krahasojmë çdo dy pika $x_1 < x_2$. Te vargjet mjafton të krahasojmë **terma fqinjë**, a_n dhe a_{n+1}, sepse indekset janë numra natyrorë të njëpasnjëshëm.

Metoda	Kushti për rritje	Kur përdoret
Diferenca	$a_{n+1} - a_n > 0$	thyesa racionale, polinome
Raporti	$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ (terma pozitivë)	fuqi, faktoriale, eksponenciale
Funksioni përkatës	$f(x)$ rritës në $[1, +\infty)$, $a_n = f(n)$	kur f është i njohur

Shembuj të zgjidhur: monotonia

(a) DIFERENCA

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1}$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$$

Pra (a_n) është rreptësisht rritës.

(b) RAPORTI

$$b_n = \frac{2^n}{n!}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1}$$

≤ 1 për $n \geq 1$ dhe < 1 për $n \geq 2$: zbritës, rreptësisht nga $n = 2$.

(c) JO MONOTON

$$c_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

$$c_1 = -1, \quad c_2 = \frac{1}{2}, \quad c_3 = -\frac{1}{3}$$

$c_1 < c_2$, por $c_2 > c_3$: shenja ndryshon në çdo hap, pra vargu nuk është monoton.

KUJDES Vargu mund të jetë monoton vetëm **nga një indeks e tutje**. Shembull: $b_1 = b_2 = 2$, pastaj b_n zbret rreptësisht.

Kufizueshmëria e vargut

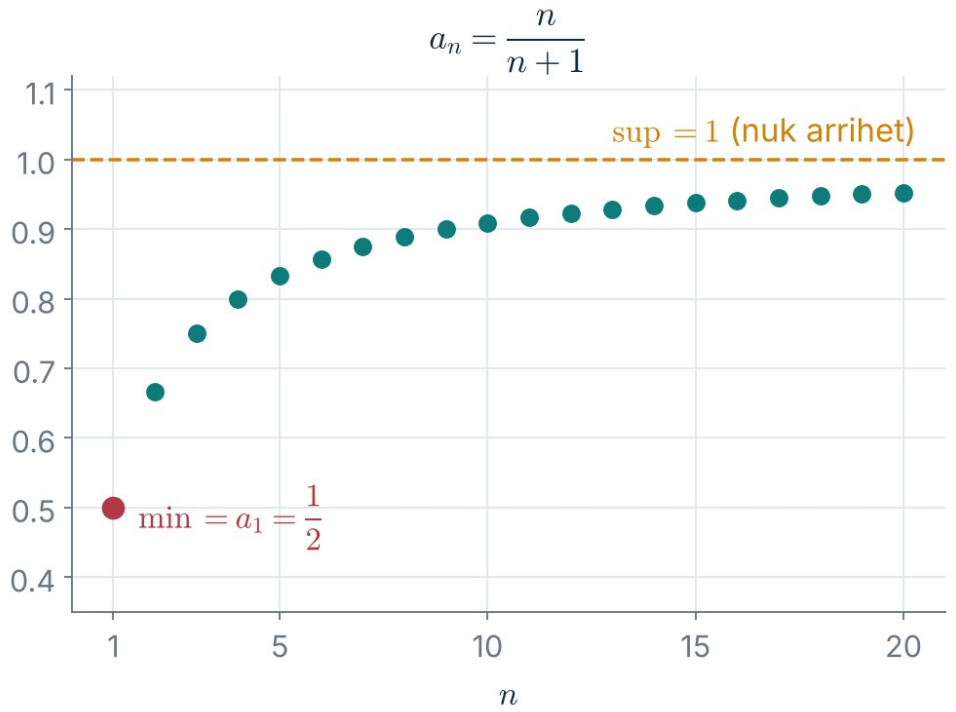
PËRKUFIZIME

- kufizuar nga sipër: $\exists M\ \forall n:\ a_n \le M$
- kufizuar nga poshtë: $\exists m\ \forall n:\ a_n \ge m$
- **i kufizuar**: $\exists K > 0\ \forall n:\ |a_n| \le K$

sup a_n *dhe* inf a_n*: kufiri më i vogël nga sipër dhe më i madh nga poshtë.*

SHEMBULL: $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

$\dfrac{1}{2} \le a_n < 1$. $\min a_n = a_1 = \dfrac{1}{2}$ (vargu rritet); $\sup a_n = 1$, por $a_n \neq 1$ për çdo n: maksimumi **nuk ekziston**.



Klasifikimi i disa vargjeve

Vargu	Monoton	I kufizuar	Konvergjent	Limiti
$\frac{1}{n}$	**po** (zbritës)	**po**	**po**	0
$\frac{n}{n+1}$	**po** (rritës)	**po**	**po**	1
$(-1)^n$	jo	**po**	jo	nuk ekziston
$\frac{(-1)^n}{n}$	jo	**po**	**po**	0
n^2	**po** (rritës)	jo	jo	$+\infty$
$(-1)^n\, n$	jo	jo	jo	nuk ekziston

IDEJA KYÇE Vëzhgim: çdo varg **konvergjent** në tabelë është i kufizuar. Teorema në pjesën III e provon këtë në përgjithësi.

III

Limiti i vargut

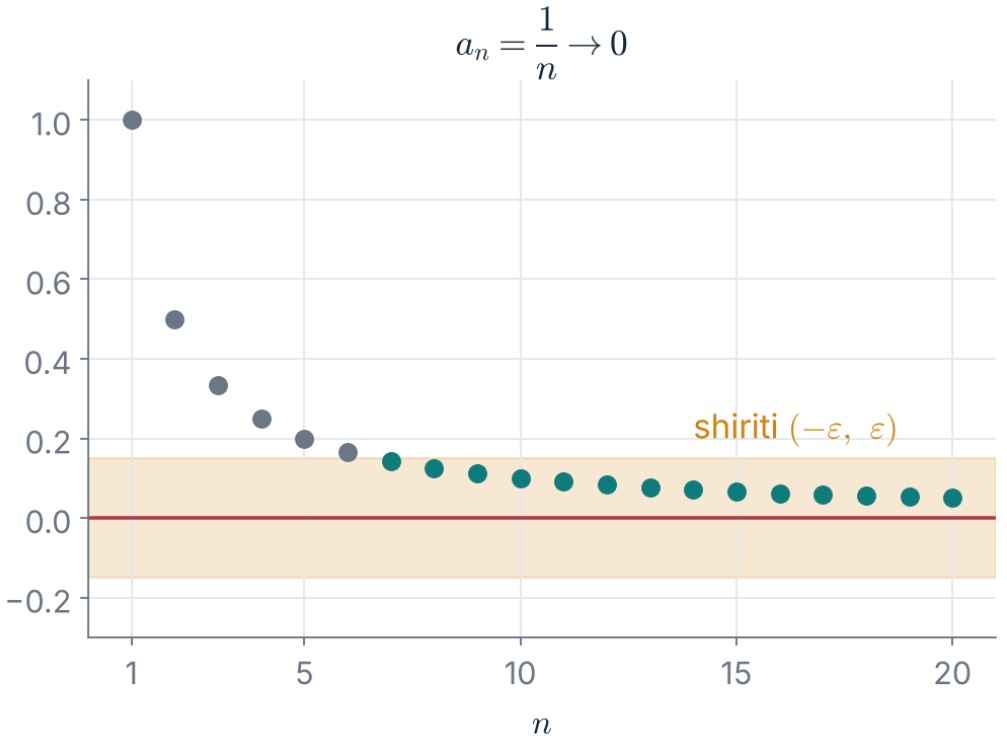
Nga ideja intuitive “afrohet” te përkufizimi i saktë ε–N

Ideja intuitive e limitit

ÇFARË DO TË THOTË "a_n AFROHET TE a"?

Për $a_n = \dfrac{1}{n}$: sado i ngushtë të jetë shiriti rreth 0, **nga një vend e tutje** të gjithë termat janë brenda tij.

Jashtë shiritit mbeten vetëm **një numër i fundëm** termash.



KUJDES "Afrohet" nuk mjafton: $1 + \dfrac{1}{n}$ afrohet edhe te $0{,}5$ (çdo term është më afër se termi para tij), por nuk e arrin kurrë një shirit të ngushtë rreth $0{,}5$. Prandaj duhet përkufizim i saktë.

Përkufizimi i limitit (ε–N)

PËRKUFIZIM (KOSHI)

Numri a quhet **limit** i vargut (a_n) dhe shkruajmë $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ose $a_n \to a$, nëse

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n > N : \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Simboli	Lexohet	Kuptimi
$\forall \varepsilon > 0$	për çdo ε pozitiv	saktësia e kërkuar, sado e vogël
$\exists N$	ekziston N	indeksi që varet nga ε
$\forall n > N$	për çdo n pas N	të gjithë termat e mëtejshëm
$\lvert a_n - a\rvert < \varepsilon$	largësia < ε	a_n është në shirit

IDEJA KYÇE Vargu që ka limit quhet **konvergjent**; ai që nuk ka, **divergjent**.

$|a_n - a| < \varepsilon \iff a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$: termi është në shiritin rreth a.

Shembull: provë me përkufizimin

PROVONI QË $\lim \dfrac{2n+1}{n+3} = 2$

1. Largësia:

$$|a_n - 2| = \left|\frac{2n+1-2n-6}{n+3}\right| = \frac{5}{n+3}$$

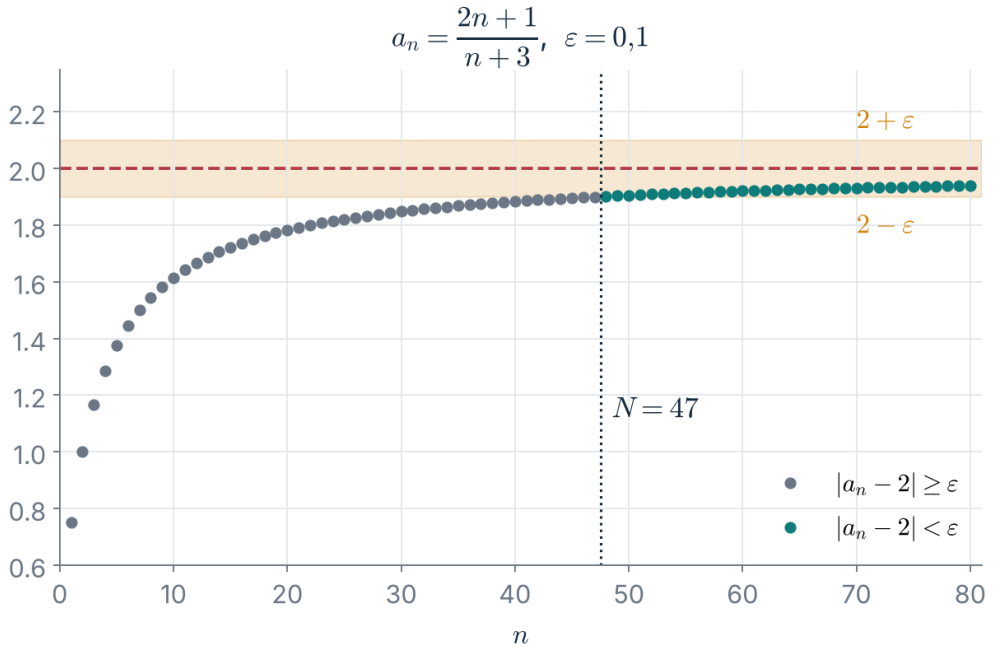
2. Zgjidhim mosbarazimin:

$$\frac{5}{n+3} < \varepsilon \iff n > \frac{5}{\varepsilon} - 3$$

3. Zgjedhim për çdo $\varepsilon > 0$: $N = \max\left\{1, \left\lceil \frac{5}{\varepsilon} - 3 \right\rceil\right\}$.

Atëherë $n > N \geq \dfrac{5}{\varepsilon} - 3$, pra $|a_n - 2| < \varepsilon$.

IDEJA KYÇE Sa më i vogël ε, aq më i madh N: N **varet** nga ε.



ε	0,1	0,01	0,001
N	47	497	4997

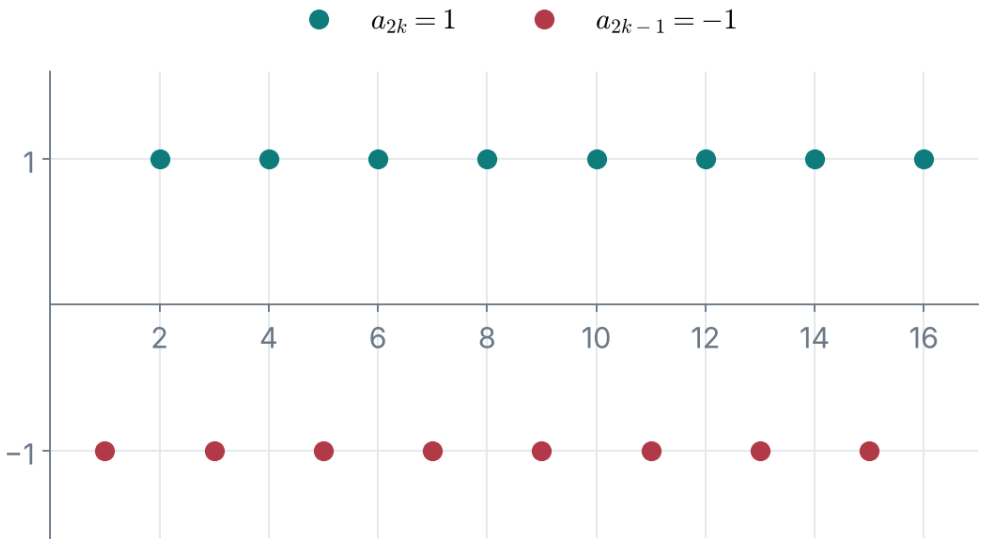
Vargjet divergjente

$(-1)^n$ NUK KA LIMIT

Provë (me kundërshtim). Nëse $a_n \to a$, marrim $\varepsilon = 1$: për $n > N$ do të kishim $|a_n - a| < 1$. Atëherë

$$2 = |a_{n+1} - a_n| \le |a_{n+1} - a| + |a - a_n| < 2,$$

kundërshtim.



LIMIT I PAFUNDËM

$\lim a_n = +\infty$ nëse $\forall M > 0\ \exists N\ \forall n > N :\ a_n > M$.

Shembull: $n^2 \to +\infty$; për M të dhënë merret $N = \lceil \sqrt{M} \rceil$.

KUJDES Vargu me limit $\pm\infty$ quhet gjithashtu **divergjent**: limiti nuk është numër real.

Teorema themelore për limitin

TEOREMË **1. Uniciteti.** Vargu konvergjent ka **vetëm një** limit.

Provë. Le $a_n \to a$, $a_n \to b$, $a \neq b$, $\varepsilon = \dfrac{|a-b|}{2}$. Për $n > \max(N_1, N_2)$:
$|a-b| \leq |a-a_n| + |a_n-b| < 2\varepsilon = |a-b|$,
kundërshtim.

TEOREMË **2. Konvergjent $\Rightarrow$ i kufizuar.**

Provë. Me $\varepsilon = 1$: për $n > N$,
$|a_n| \leq |a_n - a| + |a| < |a| + 1$. Atëherë $|a_n| \leq K$ për çdo n, ku $K = \max\{|a_1|, \dots, |a_N|, |a|+1\}$.

E ANASJELLTA NUK VLEN

$(-1)^n$ është i kufizuar ($|a_n| \leq 1$), por nuk është konvergjent. Pra kufizueshmëria është kusht **i domosdoshëm**, por jo **i mjaftueshëm**.

IDEJA KYÇE Përdorim praktik: nëse vargu **nuk** është i kufizuar (p.sh. n^2, $(-1)^n n$), ai menjëherë është divergjent.

Veprimet me limitet

NËSE $a_n \to a$ DHE $b_n \to b$, ATËHERË

$$a_n \pm b_n \to a \pm b, \qquad a_n b_n \to ab$$

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b} \quad \text{nëse } b \neq 0,\ b_n \neq 0$$

$$c\,a_n \to c\,a, \qquad |a_n| \to |a|$$

SHEMBULL: RAPORT POLINOMESH

Pjesëtojmë me fuqinë më të lartë të n:

$$\frac{3n^2 - n}{2n^2 + 5} = \frac{3 - \dfrac{1}{n}}{2 + \dfrac{5}{n^2}} \to \frac{3}{2}$$

$\dfrac{a_p n^p + \ldots}{b_q n^q + \ldots}$	$p < q$	$p = q$	$p > q$
Limiti	0	$\dfrac{a_p}{b_q}$	$+\infty$ nëse $\dfrac{a_p}{b_q} > 0$; $-\infty$ nëse $\dfrac{a_p}{b_q} < 0$

KUJDES Rregullat vlejnë vetëm kur limitet a dhe b janë **të fundme**. Format $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ kërkojnë shndërrim.

Teorema e shtrëngimit (e dy policëve)

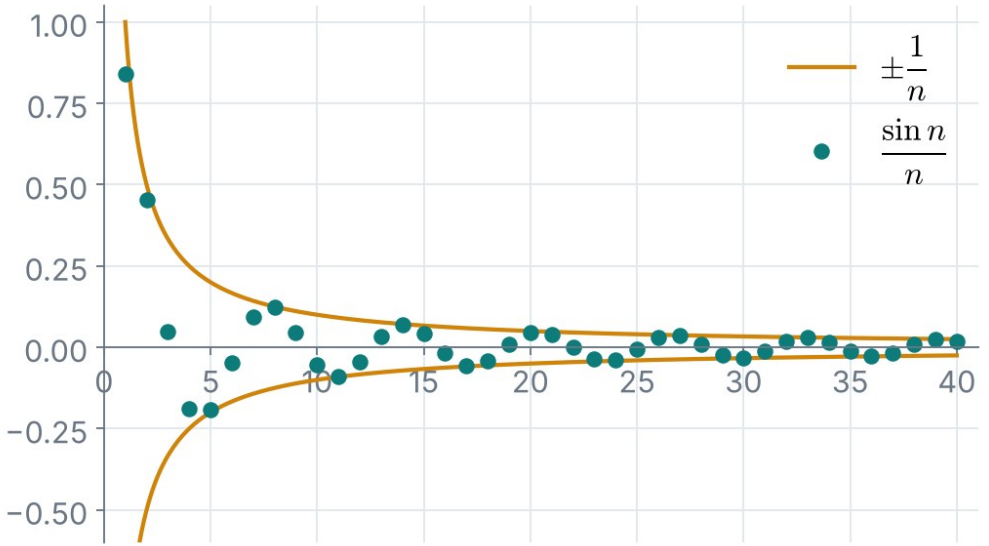
TEOREMË Nëse $b_n \le a_n \le c_n$ (nga një indeks e tutje) dhe $b_n \to a$, $c_n \to a$, atëherë edhe $a_n \to a$.

SHEMBULL: $\lim \dfrac{\sin n}{n}$

Për çdo n: $-1 \le \sin n \le 1$, prandaj

$$-\frac{1}{n} \le \frac{\sin n}{n} \le \frac{1}{n}.$$

Të dy anët $\to 0$, pra $\dfrac{\sin n}{n} \to 0$.



Teorema e Vajershtrasit

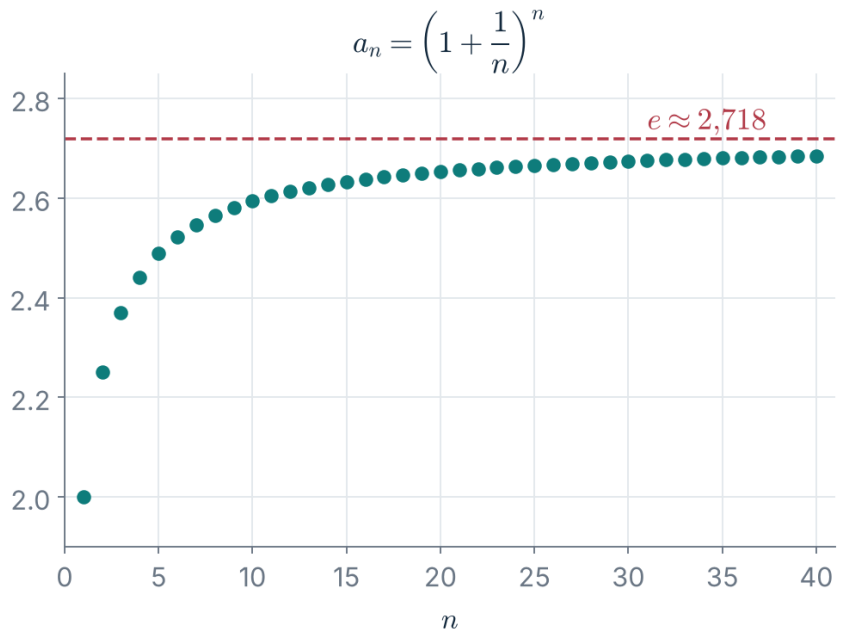
TEOREMË Çdo varg **monoton dhe i kufizuar** është konvergjent. Për vargun rritës: $\lim a_n = \sup a_n$.

IDEJA E PROVËS (rritës, i kufizuar)

Nga aksioma e plotësisë ekziston $s = \sup a_n$. Për $\varepsilon > 0$, $s - \varepsilon$ nuk është kufi i sipërm, pra $\exists N : \; a_N > s - \varepsilon$. Vargu rritet, prandaj për $n > N$:

$$s - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq s.$$

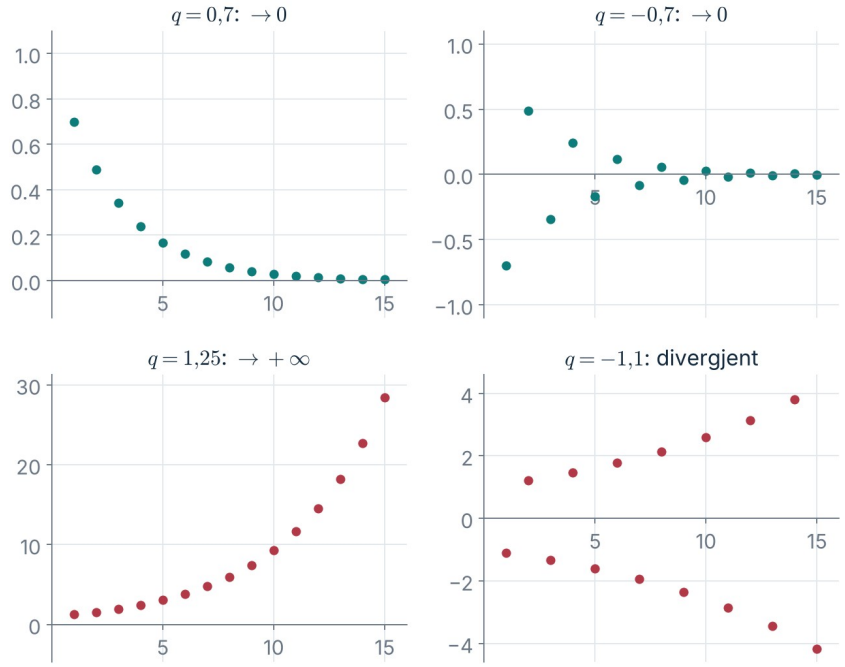
Pra $|a_n - s| < \varepsilon$.



IDEJA KYÇE $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ është rritës dhe i kufizuar (< 3), pra konvergjent. Limiti i tij përkufizon numrin $e \approx 2{,}71828$.

Limitet themelore

Vargu	Limiti	Kushti
q^n	0	$\lvert q\rvert < 1$
q^n	1	$q = 1$
q^n	$+\infty$	$q > 1$
q^n	nuk ekziston	$q = -1$: i kufizuar, luhatet ± 1
q^n	nuk ekziston	$q < -1$: i pakufizuar, ndryshon shenjë
$\sqrt[n]{a}$	1	$a > 0$
$\sqrt[n]{n}$	1	
$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	e	
$\frac{n^k}{a^n}$	0	$a > 1$, $k \in \mathbb{R}$
$\frac{a^n}{n!}$	0	a çfarëdo



IDEJA KYÇE **Hierarkia e rritjes** ($k > 0$, $a > 1$):

$\ln n \ll n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n$

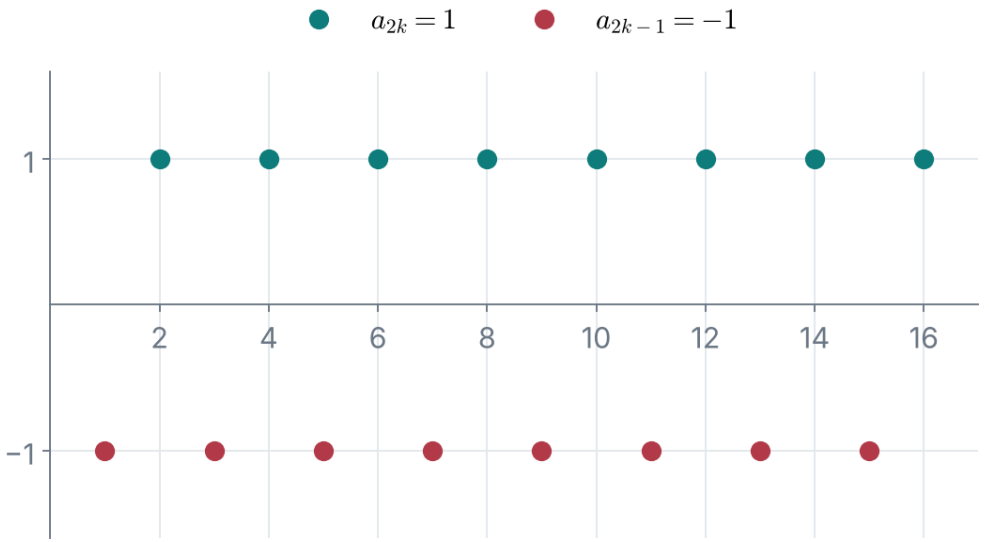
$x_n \ll y_n$ do të thotë $\frac{x_n}{y_n} \to 0$.

Nënvargjet

PËRKUFIZIM

Nëse $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ janë indekse rreptësisht rritëse, vargu $(a_{n_k})_k$ quhet **nënvarg** i (a_n).

Shembuj: termat me indeks çift (a_{2k}) ose tek (a_{2k-1}).



TEOREMË Nëse $a_n \to a$, atëherë **çdo** nënvarg $a_{n_k} \to a$.

IDEJA KYÇE Përdorim: dy nënvargje me limite të ndryshme $\Rightarrow$ vargu është divergjent.

TEOREMË **Bolcano–Vajershtras.** Çdo varg i kufizuar ka një nënvarg konvergjent.

Kriteri i Koshiut

PËRKUFIZIM

Vargu (a_n) quhet **varg i Koshiut** (fundamental) nëse

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \ \forall m, n > N : \quad |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Termat afrohen **me njëri-tjetrin**; limiti nuk përmendet.

TEOREMË Në $\mathbb{R}$: vargu është konvergjent **atëherë dhe vetëm atëherë kur** është varg i Koshiut.

Provë ($\Rightarrow$). Nëse $a_n \to a$, për $m, n > N(\frac{\varepsilon}{2})$:

$|a_m - a_n| \le |a_m - a| + |a - a_n| < \varepsilon.$

Drejtimi $\Leftarrow$ përdor Bolcano–Vajershtrasin.

PSE KA RËNDËSI

- Provon konvergjencën **pa e ditur limitin**.
- Kërkon $|a_m - a_n|$ të vogël për **të gjitha** $m, n > N$, jo vetëm për terma fqinjë.

$a_n = \sqrt{n}$: $|a_{n+1} - a_n| \to 0$, por $|a_{4n} - a_n| = \sqrt{n}$; pra nuk është varg i Koshiut.

NË INFORMATIKË Kriteri i ndalimit në programim është një version i **dobët** i kriterit të Koshiut: kontrollon vetëm terma fqinjë.

IV

Ura drejt informatikës

Algoritmet iterative, kriteri i ndalimit dhe rritja e vargjeve

Metoda e Heronit për rrënjën katrore

ALGORITMI

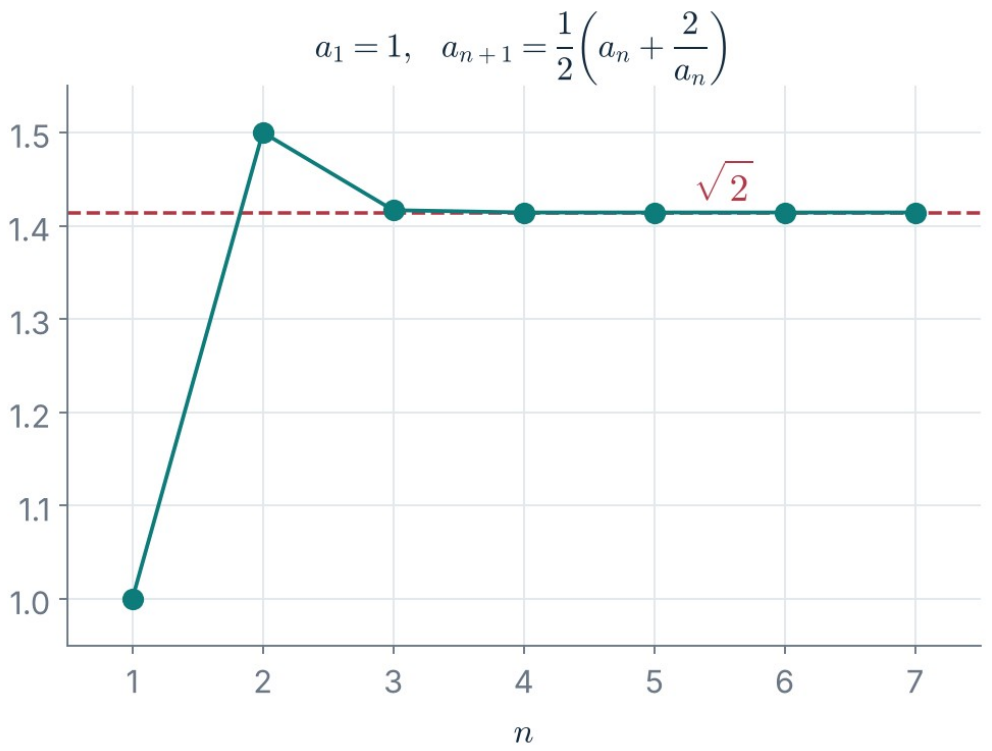
Për të llogaritur $\sqrt{c}$:

$$a_1 > 0, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)$$

Algoritmi i babilonasve, rast i veçantë i metodës së Njutonit për $x^2 - c = 0$. Prova e konvergjencës jepet në slajdin tjetër.

n	1	2	3	4	5
a_n	1	1,5	1,41667	1,414216	1,41421356

NË INFORMATIKË Pas 5 hapash: 8 shifra të sakta. Me $n = 7$ arrihet saktësia e plotë e numrave `float` (≈ 16 shifra).



Metoda e Heronit: prova e konvergjencës

1. KUFIZUAR NGA POSHTË

Nga mosbarazimi i mesatareve, për $n \geq 1$:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{c}{a_n}} = \sqrt{c}.$$

2. ZBRITËS PËR $n \geq 2$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{c - a_n^2}{2a_n} \leq 0, \quad \text{sepse } a_n \geq \sqrt{c}.$$

3. LIMITI

Nga Vajershtrasi ekziston $L = \lim a_n \geq \sqrt{c} > 0$. Kalojmë në limit në rekurrencë (tani lejohet):

$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{c}{L}\right) \iff L^2 = c \iff L = \sqrt{c}.$$

IDEJA KYÇE **Konvergjenca kuadratike.** Për gabimin $e_n = a_n - \sqrt{c}$ vlen saktësisht $e_{n+1} = \dfrac{e_n^2}{2a_n}$. Kur e_n është i vogël, gabimi i ri është rreth katrorit të tij: numri i shifrave të sakta **afërsisht dyfishohet**. Kjo vlen afër limitit, jo që në hapin e parë.

Kriteri i ndalimit në programim

PROBLEMI

Kompjuteri nuk mund të llogarisë limitin, sepse kjo kërkon pafundësisht shumë hapa. Ndalon kur dy terma të njëpasnjëshëm janë mjaft afër:

$$|a_{n+1} - a_n| < \text{tol}$$

p.sh. $tol = 10^{-12}$

NË INFORMATIKË

```
def heron(c, tol=1e-12):
    a = 1.0
    while True:
        b = (a + c/a) / 2
        if abs(b - a) < tol:
            return b
        a = b
```

KUJDES Kriteri mat **hapin** $|a_{n+1} - a_n|$, jo **gabimin** $|a_n - a|$. Dhe $|a_{n+1} - a_n| \to 0$ nuk garanton konvergjencën: për $a_n = \sqrt{n}$ hapi $\to 0$, por $\sqrt{n} \to +\infty$.

IDEJA KYÇE Te Heroni kriteri është i justifikuar: nga $e_{n+1} = \dfrac{e_n^2}{2a_n}$ rrjedh $e_{n+1} \le |a_{n+1} - a_n|$ (për $n \ge 2$), pra hapi i vogël siguron gabim të vogël.

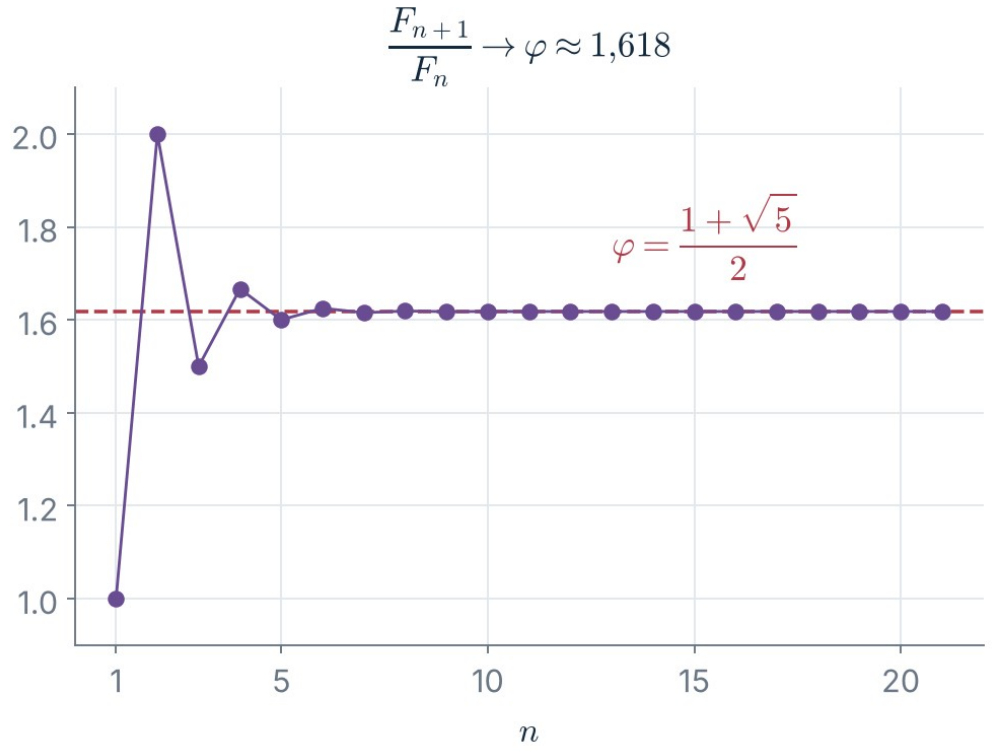
Vargu i Fibonaçit dhe raporti i artë

RAPORTI $r_n = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$**:** $1;\ 2;\ 1{,}5;\ 1{,}667;\ 1{,}6;\ldots$

Ekzistenca e limitit (formula e Bineut, $\left|\dfrac{\psi}{\varphi}\right| < 1$):

$$r_n = \frac{\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\varphi^n - \psi^n} = \varphi \cdot \frac{1 - (\psi/\varphi)^{n+1}}{1 - (\psi/\varphi)^n} \to \varphi.$$

Kontroll me rekurrencë: tani që dihet $r_n \to r$, nga $r_n = 1 + \dfrac{1}{r_{n-1}}$ del $r^2 - r - 1 = 0$, pra $r = \varphi$ (rrënja pozitive).



KUJDES Kalimi në limit lejohet **vetëm pasi** provohet ekzistenca e limitit.

NË INFORMATIKË Rekursioni naiv kryen $\approx \varphi^n$ thirrje; cikli iterativ vetëm n.

Krahasimi i pafundësive

PYETJA

Vargjet n dhe n^2 shkojnë që të dy në $+\infty$. A janë **njësoj të mëdha**? Jo: $\dfrac{n^2}{n} = n \to +\infty$.

$\lim \dfrac{a_n}{b_n}$	**Përfundimi**	**Shënimi**
0	a_n e rendit më të ulët	$a_n = o(b_n)$, $a_n \ll b_n$
$c \in (0; +\infty)$	i njëjti rend	$a_n = \Theta(b_n)$
1	ekuivalente	$a_n \sim b_n$
$+\infty$	a_n e rendit më të lartë	$b_n = o(a_n)$

PSE $\frac{\infty}{\infty}$ DHE $\infty - \infty$ JANË TË PACAKTUARA

Rezultati varet nga **cila pafundësi është më e fortë**:

$$\frac{n^2}{n} \to +\infty, \qquad \frac{n}{n^2} \to 0, \qquad \frac{2n+1}{n} \to 2$$

$$\sqrt{n^2+n} - n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} \to \frac{1}{2}$$

Te shembulli i fundit $\sqrt{n^2+n} \sim n$: dy pafundësi ekuivalente, ndryshimi i tyre është i fundëm.

KUJDES Mos e ngatërroni me fuqinë e bashkësive (Kantori): këtu krahasojmë **shpejtësinë e rritjes**, jo numrin e elementeve.

Shkalla e rritjes

TEOREMË Për $\alpha > 0$ dhe $q > 1$:

$$\ln n \ll n^{\alpha} \ll q^{n} \ll n! \ll n^{n}$$

ÇDO HAP ËSHTË NJË LIMIT

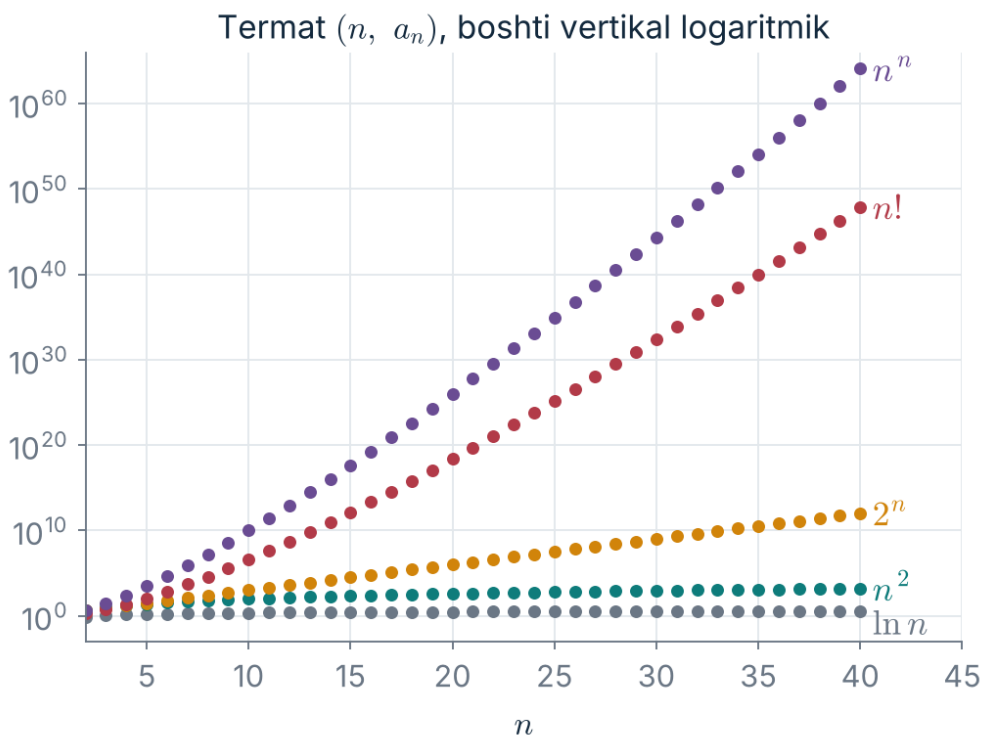
$$\frac{\ln n}{n^{\alpha}} \to 0, \qquad \frac{n^{\alpha}}{q^{n}} \to 0, \qquad \frac{q^{n}}{n!} \to 0$$

Provë e hapit të fundit:

$$\frac{n!}{n^{n}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n}{n} \leq \frac{1}{n} \to 0.$$

NË INFORMATIKË Në kompleksitet:

$$O(\log n) \ll O(n) \ll O(n \log n) \ll O(n^{2}) \ll O(2^{n}) \ll O(n!)$$



Çfarë do të thotë kjo për algoritmet

Koha e ekzekutimit për një kompjuter që kryen 10^9 veprime në sekondë:

Numri i hapave	$n = 10$	$n = 30$	$n = 60$	$n = 100$
$\log_2 n$	3 ns	5 ns	6 ns	7 ns
$n \log_2 n$	33 ns	0,15 µs	0,35 µs	0,66 µs
n^2	0,1 µs	0,9 µs	3,6 µs	10 µs
2^n	1 µs	**1,1 s**	**36 vjet**	$4 \cdot 10^{13}$ **vjet**
$n!$	3,6 ms	$8 \cdot 10^{15}$ **vjet**	$3 \cdot 10^{65}$ **vjet**	$3 \cdot 10^{141}$ **vjet**

NË INFORMATIKË Mosha e Universit është $\approx 1{,}4 \cdot 10^{10}$ vjet. Algoritmi me 2^n hapa për $n = 100$ nuk përfundon **kurrë** në praktikë.

IDEJA KYÇE Kompjuter 1000 herë më i shpejtë? Për 2^n kjo e rrit n vetëm me ≈ 10, sepse $2^{10} \approx 1000$. **Rendin e ndryshon vetëm një algoritëm më i mirë.**

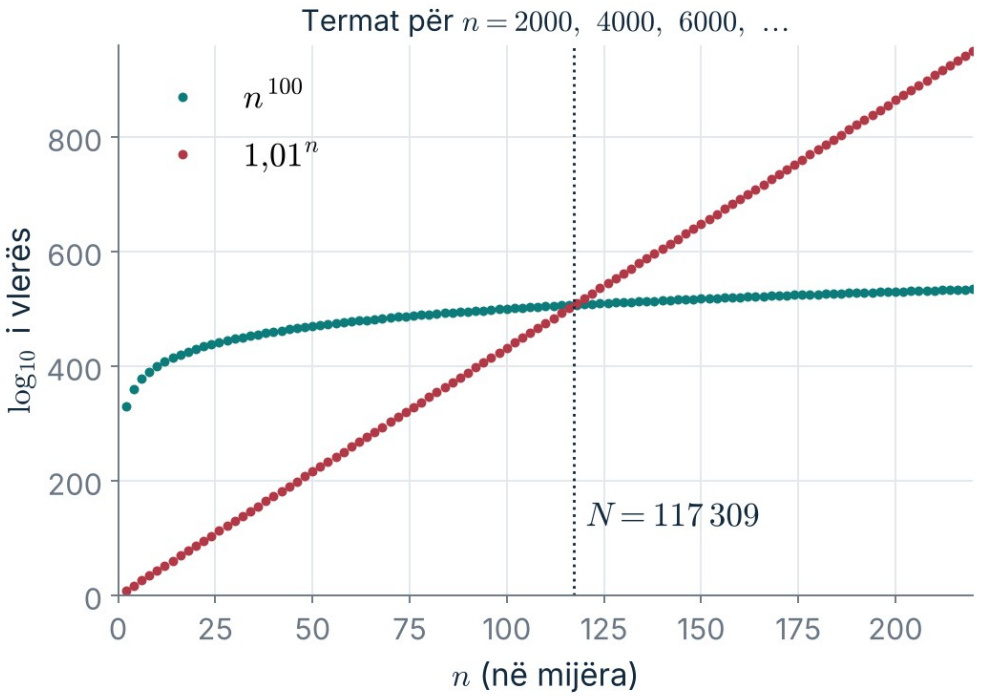
Rendi vendoset “në fund”

KUSH ËSHTË MË I MADH: n^{100} APO $1{,}01^n$?

Për $n = 1000$:

$$n^{100} = 10^{300}, \qquad 1{,}01^{1000} \approx 2{,}1 \cdot 10^{4}.$$

Megjithatë, nga limitet themelore $\dfrac{n^{100}}{1{,}01^n} \to 0$: eksponenciali fiton. Për çdo $n \geq 117\,309$ vlen $n^{100} < 1{,}01^n$.



IDEJA KYÇE Si te limiti: rendi nuk varet nga termat e parë, por nga ajo që ndodh **që nga një N e tutje**.

NË INFORMATIKË Për $2 \leq n \leq 9$ vlen $2^n < n^3$: për hyrje të vogla, 2^n hapa janë më pak se n^3.



Përmbledhje dhe ushtrime

Gabimet tipike, ushtrime dhe zgjidhjet e tyre

Gabime tipike që duhen shmangur

1 Vargu ngatërrohet me bashkësinë e vlerave të tij.

2 Pikat (n, a_n) bashkohen me vijë të vazhdueshme.

3 "Afrohet te a" merret si përkufizim i limitit.

4 N zgjidhet i pavarur nga ε.

5 I kufizuar $\Rightarrow$ konvergjent (kundërshembull: $(-1)^n$).

6 $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim a_n}{\lim b_n}$ edhe kur $\lim b_n = 0$ ose ∞.

7 Kalimi në limit në rekurrencë pa provuar konvergjencën.

8 $|a_{n+1} - a_n| \to 0 \Rightarrow$ konvergjent (kundërshembull: $\sqrt{n}$).

9 $1^\infty = 1$: $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \to e$, jo 1.

10 $\lim q^n = 0$ edhe për $q = -1$ ose $|q| > 1$.

Ushtrime për punë të pavarur

1. Shkruani 5 termat e parë dhe paraqitini në plan: $a_n = \dfrac{n-1}{n}$, $b_1 = 2$, $b_{n+1} = \dfrac{b_n}{2} + 1$.

2. Gjeni formulën e termit të përgjithshëm të vargut $3,\ 7,\ 11,\ 15,\ \ldots$ dhe shumën e 50 termave të parë.

3. Studioni monotoninë: $a_n = \dfrac{3n-1}{n+2}$ dhe $b_n = \dfrac{n^2}{2^n}$.

4. Provoni me përkufizimin ε–N: $\lim \dfrac{3n}{n+1} = 3$. Gjeni N për $\varepsilon = 0{,}01$.

5. Llogaritni: $\lim \dfrac{2n^3 - n}{5n^3 + 4}$, $\lim \dfrac{n+1}{n^2+3}$, $\lim \left(\sqrt{n^2+n} - n\right)$.

6. Provoni që $(-1)^n \dfrac{n}{n+1}$ është divergjent, duke përdorur nënvargjet.

7. Me teoremën e shtrëngimit: $\lim \dfrac{\cos(n^2)}{\sqrt{n}}$.

8. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$. Provoni që vargu konvergjon dhe gjeni limitin.

Zgjidhje: ushtrimet 1–4

USHTRIMI 1

a_n: $0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5}$ (rritës, $\to 1$).

b_n: $2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2$, sepse $\frac{2}{2}+1=2$. Vargu është konstant.

USHTRIMI 2

Aritmetik me $a_1=3$, $d=4$:

$$a_n = 4n-1, \qquad a_{50}=199$$

$$S_{50}=\frac{(3+199)\cdot 50}{2}=5050$$

USHTRIMI 3

$$a_{n+1}-a_n=\frac{7}{(n+2)(n+3)}>0 :\ \text{rritës}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{(n+1)^2}{2n^2}<1 \iff n\geq 3:\ b_n \text{ zbritës nga } n=3$$

($b_1=\frac{1}{2}<b_2=1<b_3=\frac{9}{8}$).

USHTRIMI 4

$$\left|\frac{3n}{n+1}-3\right|=\frac{3}{n+1}<\varepsilon \iff n>\frac{3}{\varepsilon}-1$$

Për $\varepsilon=0{,}01$: $n>299$, $N=299$.

Zgjidhje: ushtrimet 5–8

USHTRIMI 5

$\frac{2}{5}$ (shkallë të barabarta); $\quad 0 \;\; (1 < 2)$;

$$\sqrt{n^2+n} - n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \to \frac{1}{2}$$

USHTRIMI 6

$$a_{2k} = \frac{2k}{2k+1} \to 1, \qquad a_{2k-1} = -\frac{2k-1}{2k} \to -1$$

Dy nënvargje me limite të ndryshme $\Rightarrow$ divergjent.

USHTRIMI 7

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} \le \frac{\cos(n^2)}{\sqrt{n}} \le \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Të dy anët $\to 0$, pra limiti është 0.

USHTRIMI 8

(i) $0 < a_n < 2$: $a_1 = 1$; nëse $0 < a_n < 2$, atëherë $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} < \sqrt{4} = 2$.
(ii) $a_{n+1} > a_n \iff 2 + a_n > a_n^2 \iff (2-a_n)(1+a_n) > 0$, e vërtetë nga (i).
Vajershtrasi: L ekziston, $L \ge 1$; $L^2 = 2 + L \Rightarrow L = 2$.

Literatura

Mukli, Muka, Hysa Matematika 1. Teksti bazë i kursit: kreu i vargjeve numerike.

J. Stewart Calculus: Early Transcendentals, bot. 8, Cengage, 2015. Seksioni 11.1: Sequences.

M. Spivak Calculus, bot. 4, Publish or Perish, 2008. Kreu 22: Infinite Sequences.

T. M. Apostol Calculus, Vol. 1, bot. 2, Wiley, 1967. Kreu 10: vargjet dhe seritë.

K. H. Rosen Discrete Mathematics and Its Applications, bot. 8, McGraw-Hill, 2019. Kreu 8: rekurrencat.

R. L. Burden, J. D. Faires Numerical Analysis, bot. 10, Cengage, 2016. Kreu 2: metodat iterative.