ANALIZË MATEMATIKE I · BACHELOR NË INFORMATIKË, VITI I

Vargjet numerike

Ushtrime dhe shembuj të zgjidhur

Nga rregullat bazë te ushtrimet e nivelit të provimit

$$a_n \le b_n \le c_n,\ \ a_n \to L,\ c_n \to L \implies b_n \to L$$

Prof. As. Dr. Siditë Duraj · Departamenti i Matematikës, FSHN · Universiteti i Shkodrës «Luigj Gurakuqi»

Si është ndërtuar ky material

I	**Rregullat bazë**	limitet themelore, veprimet me limitet, simbolet ±∞, format e pacaktuara, teorema e shtrëngimit
II	**Teknikat e llogaritjes**	çdo teknikë nis me një shembull të thjeshtë dhe arrin nivelin e provimit
III	**Zbatime në informatikë**	gjashtë probleme: situata, modeli, analiza, interpretimi dhe kodi Python
IV	**Gabimet tipike**	veprime dhe përfundime të pajustifikuara, me kundërshembuj
V	**Ushtrime për punë të pavarur**	32 ushtrime në tri nivele: A (bazë), B (mesatar), C (i avancuar)
VI–VII	**Përgjigjet dhe shtojca**	përgjigje për të 32 ushtrimet; zgjidhje të plota për ushtrimet e avancuara

Harta e metodave: si duket vargu → çfarë bëj

Si duket vargu	Shembull	Metoda
thyesë me fuqi të n	$\dfrac{3n^2 - n}{2n^2 + 5}$	pjesëtojmë me fuqinë më të lartë të emëruesit
ndryshim rrënjësh ($\infty - \infty$)	$\sqrt{n^2 + 3n} - n$	shumëzojmë e pjesëtojmë me të konjuguarën
fuqi q^n	$\dfrac{2^n + 3^{n+1}}{3^n - 5}$	pjesëtojmë me fuqinë me bazë më të madhe
sin, cos, $(-1)^n$ ose shuma	$\dfrac{n \cos n}{n^2 + 1}$	teorema e shtrëngimit (rregulli i dy policëve)
$(1 +$ e vogël$)^{\text{e madhe}}$	$\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$	sjellim në $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n} \to e$
dhënë me rekurrencë	$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$	monoton + i kufizuar (Vajershtrasi), pastaj kalojmë në limit
“provoni me përkufizim”	$\dfrac{3n - 1}{n + 2} \to 3$	zgjidhim $\lvert a_n - a \rvert < \varepsilon$ në lidhje me n
“provoni që është divergjent”	$(1 + (-1)^n)\dfrac{n}{n + 1}$	dy nënvargje me limite të ndryshme

I

Rregullat bazë

Rregullat që i takojmë për herë të parë te vargjet dhe që do t'i përdorim kudo

Limitet themelore (q, a, k janë konstante)

Limiti	Pse vlen (ideja e provës)
$\lim c = c$	vargu konstant: $\lvert a_n - c\rvert = 0 < \varepsilon$ për çdo n
$\lim \frac{1}{n} = 0;\ \lim \frac{1}{n^k} = 0\ \ (k > 0)$	$\frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$ (aksioma e Arkimedit)
$\lim q^n = 0$ për $\lvert q\rvert < 1$	për $q \neq 0$: $\lvert q\rvert = \frac{1}{1+h},\ h > 0$; Bernuli: $(1+h)^n \geq 1 + nh \ \Rightarrow\ 0 \leq \lvert q\rvert^n \leq \frac{1}{nh}$
$\lim \sqrt[n]{a} = 1\ \ (a > 0)$	$a > 1$: $a = (1+h_n)^n \geq 1 + nh_n \Rightarrow 0 < h_n \leq \frac{a-1}{n}$; $a = 1$: e qartë; $0 < a < 1$: $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} \to 1$
$\lim \sqrt[n]{n} = 1$	$n = (1+h_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} h_n^2 \ \Rightarrow\ 0 < h_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$
$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$	rritës dhe i kufizuar nga lart ⇒ konvergjent (Vajershtrasi)

IDEJA KYÇE Provat e rreshtave 3–5 mbarojnë me "$0 \leq \ldots \leq$ diçka $\to 0$": kjo është **teorema e shtrëngimit** (rregulli i dy policëve).

Veprimet me limitet

RREGULLAT

Nëse $a_n \to a$ dhe $b_n \to b$ (të dy **numra**), atëherë:

$$a_n \pm b_n \to a \pm b, \qquad c \cdot a_n \to c \cdot a$$

$$a_n \cdot b_n \to a \cdot b, \qquad \frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b} \ \ (b \neq 0)$$

$$|a_n| \to |a|, \qquad a_n^k \to a^k \ \ (k \in \mathbb{N})$$

SHEMBUJT E PARË

$$\frac{5n+2}{n} = 5 + \frac{2}{n} \to 5 + 0 = 5$$

$$\frac{(n+1)^2}{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \to 1^2 = 1$$

$$\frac{2 - \dfrac{1}{n}}{3 + \dfrac{4}{n^2}} \to \frac{2-0}{3+0} = \frac{2}{3}$$

KUJDES Rregullat vlejnë **vetëm kur të dy limitet ekzistojnë dhe janë të fundme** (numra realë); për limitet e pafundme shih faqen pasuese. Shembull: $(-1)^n$ dhe $(-1)^{n+1}$ janë divergjentë, por shuma e tyre është 0. Kur shfaqet formë e pacaktuar, rregullat **nuk** zbatohen drejtpërdrejt: vargu duhet transformuar më parë.

Limitet e pafundme: rregullat me $\pm\infty$

Nëse…	atëherë…
$a_n \to +\infty,\ b_n \to +\infty$	$a_n + b_n \to +\infty$, $a_n b_n \to +\infty$
$a_n \to +\infty,\ b_n \to b$	$a_n + b_n \to +\infty$
$a_n \to +\infty,\ b_n \to b > 0$	$a_n b_n \to +\infty$
$a_n \to +\infty,\ b_n \to b < 0$	$a_n b_n \to -\infty$
$a_n \to c,\ b_n \to \pm\infty$	$\dfrac{a_n}{b_n} \to 0$
$a_n \to c > 0,\ b_n \to 0,\ b_n > 0$	$\dfrac{a_n}{b_n} \to +\infty$

SHKURTIMISHT

$$\infty + \infty = \infty, \qquad \infty + c = \infty$$

$$c \cdot \infty = \pm\infty \ \ (c \neq 0), \qquad \frac{c}{\infty} = 0$$

Simbolet $+\infty$ dhe $-\infty$ nuk janë numra realë. Këto shkurtime përshkruajnë sjelljen e limiteve dhe nuk janë veprime aritmetike të zakonshme.

IDEJA KYÇE Shembull: $n^2 + 3n \to +\infty$ (shumë pafundësish), $\dfrac{7}{n^2+1} \to 0$ (numër / pafundësi).

Format e pacaktuara

Shtatë forma ku rezultati **varet nga vargjet**: $\infty - \infty,\quad \dfrac{\infty}{\infty},\quad \dfrac{0}{0},\quad 0 \cdot \infty,\quad 1^{\infty},\quad \infty^{0},\quad 0^{0}$

Forma	Tre shembuj, tre përgjigje të ndryshme
$\infty - \infty$	$(n+1) - n \to 1;$ $\quad n^2 - n \to +\infty;$ $\quad n - n^2 \to -\infty$
$\dfrac{\infty}{\infty}$	$\dfrac{2n}{n} \to 2;$ $\quad \dfrac{n^2}{n} \to +\infty;$ $\quad \dfrac{n}{n^2} \to 0$
$0 \cdot \infty$	$\dfrac{1}{n} \cdot n \to 1;$ $\quad \dfrac{1}{n} \cdot n^2 \to +\infty;$ $\quad \dfrac{1}{n^2} \cdot n \to 0$
1^{∞}	$1^n \to 1;$ $\quad \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \to e;$ $\quad \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2} \to +\infty$

KUJDES Forma e pacaktuar **nuk** do të thotë “limiti nuk ekziston”. Do të thotë: duhet ta transformojmë vargun para se të llogaritim.

Teorema e shtrëngimit (rregulli i dy policëve)

TEOREMË Nëse që nga një n_0 e tutje

$$a_n \le b_n \le c_n \quad \text{dhe} \quad a_n \to L,\ \ c_n \to L,$$

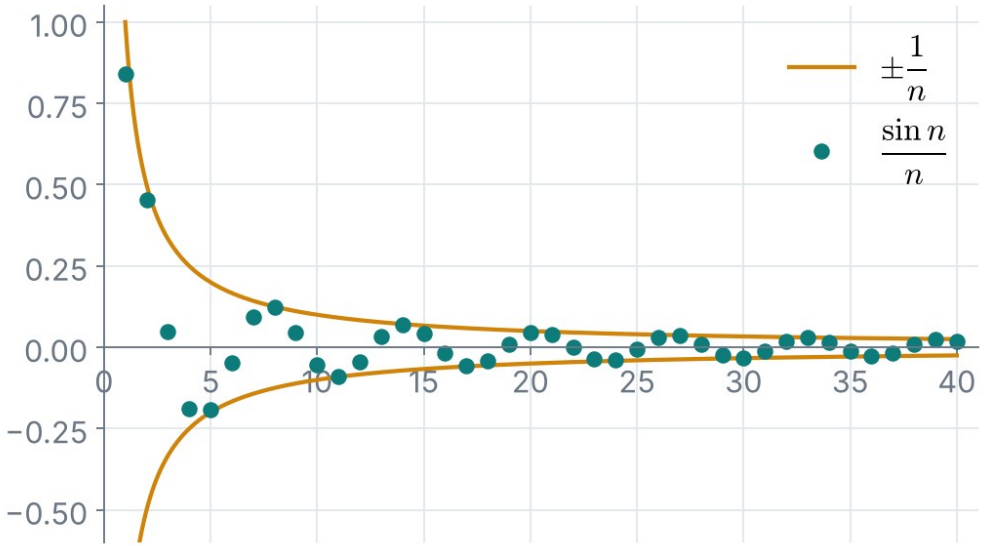
atëherë edhe $b_n \to L$.

PSE "POLICËT"

Dy policë (a_n dhe c_n) e shoqërojnë të burgosurin (b_n) nga të dy anët. Kur policët arrijnë në stacion (L), edhe i burgosuri arrin aty: nuk ka nga të ikë.

SI PËRDORET

Gjejmë një kufi nga poshtë dhe një nga lart që kanë **të njëjtin** limit. Zakonisht përdorim $-1 \le \sin x, \cos x, (-1)^n \le 1$.



Teorema e shtrëngimit: shembujt e parë

SHEMBULLI 1

$$b_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

Meqë $-1 \le (-1)^n \le 1$, pjesëtojmë me $n > 0$:

$$-\frac{1}{n} \le \frac{(-1)^n}{n} \le \frac{1}{n}.$$

Policët: $-\frac{1}{n} \to 0$ dhe $\frac{1}{n} \to 0$. Pra $\frac{(-1)^n}{n} \to 0$.

SHEMBULLI 2

$$b_n = \frac{\sin n}{n}$$

Njësoj: $-\frac{1}{n} \le \frac{\sin n}{n} \le \frac{1}{n}$, prandaj $\frac{\sin n}{n} \to 0$.

RREGULL I DOBISHËM: "ZERO × E KUFIZUAR = ZERO"

Nëse $a_n \to 0$ dhe $|b_n| \le M$ për çdo n, atëherë $a_n b_n \to 0$.

Provë. $0 \le |a_n b_n| \le M|a_n| \to 0$, pra nga policët $|a_n b_n| \to 0$, d.m.th. $a_n b_n \to 0$.

SHEMBULLI 3

$$\frac{\cos(n^2)}{n^2+1} = \underbrace{\frac{1}{n^2+1}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\cos(n^2)}_{|\cdot| \le 1} \to 0$$

KUJDES $\lim(\sin n)$ **nuk ekziston**, prandaj nuk mund të shkruajmë "$\lim \frac{\sin n}{n} = \frac{\lim \sin n}{\lim n}$". Teorema e shtrëngimit e zgjidh problemin pa e llogaritur $\lim \sin n$.

Rregulla të tjera që përdoren shpesh

1. VLERA ABSOLUTE

$a_n \to 0 \iff |a_n| \to 0$

Për limit $\neq 0$ vlen vetëm "$\Rightarrow$": $|(-1)^n| \to 1$, por $(-1)^n$ diverjgon.

2. MOSBARAZIMET RUHEN

Nëse $a_n \leq b_n$ dhe të dy konvergjojnë, atëherë $\lim a_n \leq \lim b_n$.

Kujdes: $<$ bëhet $\leq$. P.sh. $\frac{1}{n} > 0$, por $\lim \frac{1}{n} = 0$.

3. VAJERSHTRASI

Monoton dhe i kufizuar $\Rightarrow$ konvergjent.

E përdorim kur limiti nuk llogaritet direkt, p.sh. te vargjet rekurrente.

4. NËNVARGJET

Nëse $a_n \to a$, çdo nënvarg $\to a$. Pra: dy nënvargje me limite të ndryshme $\Rightarrow a_n$ divergjent.

II

Teknikat e llogaritjes

Çdo teknikë: një shembull i thjeshtë, pastaj një i nivelit të provimit

Thyesat racionale (1): fuqi të barabarta

SHEMBULLI 1 (I THJESHTË)

$$\lim \frac{2n+1}{n+3}$$

Forma $\frac{\infty}{\infty}$. Pjesëtojmë numëruesin dhe emëruesin me n:

$$\frac{2n+1}{n+3} = \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}} \to \frac{2+0}{1+0} = 2.$$

SHEMBULLI 2

$$\lim \frac{3n^2-n}{2n^2+5}$$

Fuqia më e lartë në emërues: n^2. Pjesëtojmë me n^2:

$$\frac{3n^2-n}{2n^2+5} = \frac{3-\frac{1}{n}}{2+\frac{5}{n^2}} \to \frac{3}{2}.$$

Përgjigja është raporti i koeficientëve të fuqive më të larta.

IDEJA KYÇE Pse pjesëtojmë? Që çdo term të bëhet ose konstante, ose $\frac{c}{n^k} \to 0$. Atëherë mund të zbatojmë rregullin e herësit, sepse emëruesi ka limit $\neq 0$.

Thyesat racionale (2): fuqi të ndryshme

SHEMBULLI 3: FUQIA LART MË E MADHE

$$\frac{n^3+1}{n^2-4n} = \frac{n+\dfrac{1}{n^2}}{1-\dfrac{4}{n}} \to +\infty$$

numëruesi $\to +\infty$, *emëruesi* $\to 1$

SHEMBULLI 4: FUQIA POSHTË MË E MADHE

$$\frac{n+1}{n^2+1} = \frac{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^2}} \to \frac{0}{1} = 0$$

$P = a_p n^p + \dots$, $Q = b_q n^q + \dots$	$p < q$	$p = q$	$p > q$
$\lim \dfrac{P(n)}{Q(n)}$	0	$\dfrac{a_p}{b_q}$	$+\infty$ nëse $\dfrac{a_p}{b_q} > 0$; $-\infty$ nëse $\dfrac{a_p}{b_q} < 0$

KUJDES $a_p \neq 0$ dhe $b_q \neq 0$ janë **koeficientët kryesorë**. Shembull: $\dfrac{2-n^3}{n+1} \to -\infty$, sepse $p = 3 > q = 1$ dhe $\dfrac{a_p}{b_q} = -1 < 0$.

Tabela është **pasojë** e metodës: në provim shkruani pjesëtimin.

E konjuguara (1): forma $\infty - \infty$

SHEMBULLI 5 (I THJESHTË)

$$\lim \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$$

Shumëzojmë dhe pjesëtojmë me $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$:

$$\frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \to 0.$$

SHEMBULLI 6

$$\lim \left(\sqrt{n^2 + 3n} - n\right)$$

$$= \frac{(n^2 + 3n) - n^2}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} = \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 3n} + n}$$

Pjesëtojmë me n (dhe $\frac{\sqrt{n^2 + 3n}}{n} = \sqrt{1 + \frac{3}{n}}$):

$$= \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1} \to \frac{3}{2}.$$

IDEJA KYÇE Formula që përdorim: $(\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B}) = A - B$. Ajo e kthen $\infty - \infty$ në $\frac{\text{diçka}}{\infty}$, që llogaritet lehtë.

E konjuguara (2): forma $0 \cdot \infty$

SHEMBULLI 7

$$\lim n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$$

Kllapa $\to 0$ dhe $n \to \infty$: forma $0 \cdot \infty$.

$$n \cdot \frac{(n^2+1)-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} \to \frac{1}{2}.$$

PSE NUK ËSHTË 0?

Gabimi tipik: "kllapa shkon në 0, pra produkti shkon në 0".

Por kllapa shkon në 0 **aq ngadalë** sa $\frac{1}{2n}$, ndërsa n rritet aq shpejt sa n. Produkti i tyre $\approx \frac{1}{2}$.

Kontroll numerik: për $n = 1000$,
$n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right) \approx 0{,}49999988.$

KUJDES "$0 \cdot \infty = 0$" është **gabim**. Rregulli "zero $\times$ e kufizuar = zero" vlen vetëm kur faktori tjetër është **i kufizuar**.

Vargjet me fuqi q^n

SHEMBULLI 8 (I THJESHTË)

$$\lim \frac{2^n}{3^n} = \lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

sepse $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$

SHEMBULLI 9

$$\lim \frac{5 \cdot 4^n + 1}{4^{n+1}} = \lim \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{4^{n+1}}\right) = \frac{5}{4}$$

SHEMBULLI 10

$$\lim \frac{2^n + 3^{n+1}}{3^n - 5}$$

Baza më e madhe: 3. Pjesëtojmë me 3^n:

$$= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3}{1 - \frac{5}{3^n}} \to \frac{0 + 3}{1 - 0} = 3.$$

IDEJA KYÇE Pjesëtojmë me fuqinë që ka **bazën më të madhe**. Të gjitha fuqitë e tjera kthehen në q^n me $|q| < 1$, që shkojnë në 0.

Teorema e shtrëngimit (2): nivel provimi

SHEMBULLI 11

$\lim \sqrt[n]{2^n + 3^n}$

Termi më i madh brenda rrënjës është 3^n:

$$3^n \le 2^n + 3^n \le 2 \cdot 3^n$$

$$3 \le \sqrt[n]{2^n + 3^n} \le \sqrt[n]{2} \cdot 3.$$

Meqë $\sqrt[n]{2} \to 1$, të dy policët $\to 3$. Pra limiti është 3.

SHEMBULLI 12

$\lim \dfrac{n \cos n}{n^2 + 1}$

Meqë $|\cos n| \le 1$:

$$0 \le \left|\frac{n \cos n}{n^2 + 1}\right| \le \frac{n}{n^2 + 1} \to 0.$$

Nga policët (dhe rregulli i vlerës absolute) limiti është 0.

IDEJA KYÇE Te $\sqrt[n]{a^n + b^n}$ me $0 < a < b$ fiton gjithmonë baza më e madhe: limiti është b.

Teorema e shtrëngimit (3): limiti i një shume

SHEMBULLI 13

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

Shuma ka n terma. Më i madhi është i pari, më i vogli i fundit:

$$n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le b_n \le n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Të dy policët:

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \to 1, \qquad \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \to 1.$$

Pra $b_n \to 1$.

KUJDES Për çdo k **të fiksuar**, termi i k-të shkon në 0. Kjo **nuk mjafton**: numri i termave rritet bashkë me n, dhe shuma e n termave të vegjël mund të ketë çdo limit.

IDEJA KYÇE Recetë: shuma e n termave $\in$ [n·më i vogli; n·më i madhi].

NË INFORMATIKË Kontroll numerik: për $n = 10\,000$, $b_n \approx 0{,}99997$.

Limitet që lidhen me numrin e

SHEMBULLI 14: TRI RASTE

Të gjitha sillen te $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) \to e \cdot 1 = e$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^2 \to e^2$$

RASTI I TRETË

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

Për $n \geq 2$: $1-\frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} = \frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}$. Me $m = n-1$:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \left(1+\frac{1}{m}\right)} \to \frac{1}{e \cdot 1} = \frac{1}{e}.$$

KUJDES 1^∞ **nuk** është 1: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e \approx 2{,}718$. Formulën e përgjithshme $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n \to e^a$ do ta provojmë pasi të mësojmë limitin e funksionit.

Shkalla e rritjes në ushtrime

SHEMBULLI 15

$$\lim \frac{n^{10}}{2^n} = 0, \qquad \lim n^2 \left(\frac{2}{3}\right)^n = \lim \frac{n^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} = 0$$

Nga limitet themelore: $\frac{n^k}{a^n} \to 0$ *për* $a > 1$. *Fuqia humbet ndaj eksponencialit.*

SHEMBULLI 16

$$\lim \frac{n^3 + 2^n}{3 \cdot 2^n - n}$$

Termi dominues: 2^n. Pjesëtojmë me 2^n:

$$= \frac{\frac{n^3}{2^n} + 1}{3 - \frac{n}{2^n}} \to \frac{0 + 1}{3 - 0} = \frac{1}{3}.$$

IDEJA KYÇE Kur ka përzierje fuqish dhe eksponencialësh, pjesëtojmë me **termin dominues** sipas shkallës ln $n \ll n^\alpha \ll q^n \ll n! \ll n^n$.

Monotonia dhe kufizueshmëria

SHEMBULLI 17

$$a_n = \frac{n}{2^n}$$

Metoda e raportit (termat janë pozitivë):

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{n+1}{2n} \leq 1$$

sepse $n+1 \leq 2n$ për $n \geq 1$. Pra vargu është **jorritës**.

VAZHDIMI

I kufizuar: $0 < a_n \leq a_1 = \frac{1}{2}$.

Përfundimi: jorritës dhe i kufizuar nga poshtë $\Rightarrow$ konvergjent (Vajershtrasi).

Limiti: $\frac{n}{2^n} \to 0$ nga shkalla e rritjes.

Termat: $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{5}{32}, \ldots$ *($a_1 = a_2$, prandaj "jorritës", jo "zbritës").*

IDEJA KYÇE Diferenca $a_{n+1} - a_n$ përshtatet për thyesa racionale; **raporti** $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ për fuqi dhe faktorialë.

Një limit, dy metoda (shembulli 17)

METODA 1: VAJERSHTRASI + KALIMI NË LIMIT

Llogarisim lim $\frac{n}{2^n}$. Nga shembulli 17, $L = \lim a_n$ ekziston. Nga

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{2n} \cdot a_n$$

dhe $\frac{n+1}{2n} \to \frac{1}{2}$, kalojmë në limit:

$$L = \frac{1}{2}L \;\Rightarrow\; L = 0.$$

METODA 2: SHTRËNGIMI

Nga binomi i Njutonit, për $n \geq 2$:

$$2^n = (1+1)^n \geq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Prandaj

$$0 < \frac{n}{2^n} \leq \frac{2}{n-1} \to 0,$$

dhe nga teorema e shtrëngimit $\frac{n}{2^n} \to 0$.

IDEJA KYÇE Metoda 1 kërkon që **më parë** të provohet ekzistenca e limitit. Metoda 2 e jep limitin direkt, por kërkon një vlerësim të përshtatshëm.

Vargu rekurrent: hap pas hapi

SHEMBULLI 18

$$a_1 = \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

1. I kufizuar: $a_n < 2$ (induksion). $a_1 = \sqrt{2} < 2$.
Nëse $a_n < 2$, atëherë $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{4} = 2$.

2. Rritës. Meqë $0 < a_n < 2$:

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = 2 + a_n - a_n^2 = (2 - a_n)(1 + a_n) > 0.$$

3. LIMITI

Nga Vajershtrasi ekziston $L = \lim a_n$, me $\sqrt{2} \le L \le 2$. Kalojmë në limit në $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ (**tani lejohet**, sepse limiti ekziston; shih lemën më poshtë):

$$L = \sqrt{2 + L} \;\Rightarrow\; L^2 - L - 2 = 0$$

$$\Rightarrow\; L = 2 \text{ ose } L = -1.$$

Meqë $L > 0$: $\lim a_n = 2$.

*Ekuacioni $L = \sqrt{2 + L}$ vetëm **gjen** vlerën e limitit. Konvergjencën e provuan hapat 1 dhe 2.*

NË INFORMATIKË Termat: $1{,}4142;\ 1{,}8478;\ 1{,}9616;\ 1{,}9904;\ 1{,}9976; \ldots \to 2$. Kështu punon edhe një cikël `while` që përsërit `a = sqrt(2 + a)`.

Lema: limiti i rrënjës katrore të një vargu

TEOREMË Nëse $a_n \geq 0$ dhe $a_n \to a$, atëherë $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$.

PROVË PËR $a > 0$

Me të konjuguarën:

$$\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}} \to 0.$$

Nga policët: $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$.

PROVË PËR $a = 0$

Për $\varepsilon > 0$ marrim N të tillë që $a_n < \varepsilon^2$ për $n > N$. Atëherë

$$\sqrt{a_n} < \varepsilon \quad \text{për } n > N.$$

IDEJA KYÇE Kjo lemë e justifikon hapin "$L = \sqrt{2 + L}$" te shembulli 18. (Më vonë do ta shohim si rast të vazhdueshmërisë së funksionit $\sqrt{x}$.)

Vërtetimi sipas përkufizimit ε–N

SHEMBULLI 19

$$\lim \frac{3n-1}{n+2} = 3$$

Hapi 1. Thjeshtojmë diferencën:

$$\left|\frac{3n-1}{n+2} - 3\right| = \left|\frac{3n-1-3n-6}{n+2}\right| = \frac{7}{n+2}.$$

Hapi 2. Zgjidhim mosbarazimin:

$$\frac{7}{n+2} < \varepsilon \iff n > \frac{7}{\varepsilon} - 2.$$

HAPI 3: ZGJEDHIM N

$$N = \max\left\{1,\ \left\lceil \frac{7}{\varepsilon} - 2 \right\rceil\right\}.$$

Atëherë për çdo $n > N$ vlen $|a_n - 3| < \varepsilon$.

ε	0,1	0,01	0,001
N	68	698	6998

KUJDES **Konventa** (si në leksion): $|a_n - a| < \varepsilon$ **për çdo** $n > N$. Me konventën "$n \geq N$", N del një njësi më i madh. N **varet nga** ε; përgjigje si "$N = 100$" pa ε është e paplotë.

Divergjenca me nënvargje

SHEMBULLI 20

$$a_n = (1 + (-1)^n)\,\frac{n}{n+1}$$

Indekset çift $n = 2k$: $1 + (-1)^{2k} = 2$,

$$a_{2k} = \frac{2 \cdot 2k}{2k+1} \to 2.$$

Indekset tek $n = 2k-1$: $1 + (-1)^{2k-1} = 0$,

$$a_{2k-1} = 0 \to 0.$$

PËRFUNDIMI

Dy nënvargje kanë limite të ndryshme ($2 \neq 0$). Nëse a_n do të kishte limit, çdo nënvarg do të kishte **të njëjtin** limit. Pra a_n është **divergjent**.

Termat: $0;\ \frac{4}{3};\ 0;\ \frac{8}{5};\ 0;\ \frac{12}{7};\ \ldots$

IDEJA KYÇE Vargu është i kufizuar ($0 \leq a_n < 2$), por prapë divergjent: **i kufizuar** $\not\Rightarrow$ **konvergjent**.

Kriteri i Koshiut: seria harmonike

SHEMBULLI 21

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Çdo term i shtuar $\frac{1}{n} \to 0$. A konvergjon H_n?

Shqyrtojmë $H_{2n} - H_n$, një shumë me n terma, nga të cilët më i vogli është $\frac{1}{2n}$:

$$H_{2n} - H_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

PËRFUNDIMI

Për $\varepsilon = \frac{1}{2}$ nuk ekziston N me $|H_m - H_n| < \frac{1}{2}$ për të gjitha $m, n > N$ (merrni $m = 2n$). Pra H_n **nuk** është varg i Koshiut, prandaj është divergjent.

Meqë H_n është rritës, $H_n \to +\infty$.

NË INFORMATIKË $H_n \approx \ln n$. Algoritmi `Quicksort` kryen mesatarisht rreth $2nH_n \approx 2n \ln n$ krahasime: seria harmonike shfaqet te analiza e algoritmeve.

III

Zbatime në informatikë

Situata · modeli matematik · analiza · interpretimi · kodi Python

Zbatimi 1: pse një algoritëm bëhet i papërdorshëm?

SITUATA

Dy algoritme zgjidhin të njëjtin problem me n të dhëna. Algoritmi A kryen $a_n = n^2$ veprime, algoritmi B kryen $b_n = 2^n$.

MODELI: DY VARGJE

n	n^2	2^n
10	100	1024
20	400	$1\,048\,576$
30	900	$\approx 1{,}07 \cdot 10^9$
50	2500	$\approx 1{,}13 \cdot 10^{15}$

ANALIZA

Nga shkalla e rritjes: $\dfrac{n^2}{2^n} \to 0$, pra $n^2 \ll 2^n$. Për $n = 20$: $\dfrac{2^n}{n^2} = 2621{,}44$.

INTERPRETIMI

Për $n = 10^6$ të dhëna dhe 10^9 veprime në sekondë: A kryen 10^{12} veprime, rreth **17 minuta**. B kryen 2^{10^6} veprime, një numër me $301\,030$ shifra: **nuk përfundon kurrë**.

*Kujdes: kjo është numër teorik veprimesh, jo kohë e matur. Por për n të mëdha vendos **rendi i rritjes**.*

NË INFORMATIKË Python:

```
for n in [10, 20, 30, 50]:
    print(n, n**2, 2**n, 2**n / n**2)
```

Zbatimi 2: kërkimi binar dhe përgjysmimi

SITUATA

Kërkojmë një emër në një listë të renditur me $N = 10^6$ emra. Çdo krahasim e **përgjysmon** pjesën ku mund të jetë emri.

MODELI

Gjatësia e pjesës pas k krahasimesh:

$$L_k = \frac{N}{2^k} \to 0 \qquad (\text{varg gjeometrik me } q = \frac{1}{2}).$$

ANALIZA

Kërkimi mbaron kur $L_k < 1 \iff 2^k > N \iff k > \log_2 N$. Numri i krahasimeve është $\lfloor \log_2 N \rfloor + 1$:

N	10^3	10^6	10^9
krahasime	10	20	30

INTERPRETIMI

Kërkimi linear kërkon deri në 10^6 krahasime, ai binar vetëm 20. E njëjta ide: **metoda e përgjysmimit** për rrënjët e ekuacioneve, me gabim $\leq \frac{b-a}{2^k}$.

NË INFORMATIKË Python:

```
def kerko(lista, x):
    a, b = 0, len(lista) - 1
    while a <= b:
        m = (a + b) // 2
        if lista[m] == x: return m
        a, b = (m + 1, b) if lista[m] < x else (a, m - 1)
    return -1
```

Zbatimi 3: si e llogarit kompjuteri $\sqrt{6}$?

SITUATA

Procesori kryen vetëm $+,\ -,\ \times,\ \div$. Si llogaritet atëherë $\sqrt{6}$?

MODELI: VARGU I HERONIT

$$a_1 = 3, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{6}{a_n}\right) \to \sqrt{6}.$$

Konvergjenca u provua te leksioni (Vajershtrasi).

ANALIZA

n	a_n	$\lvert a_n - \sqrt{6}\rvert$
2	2,5	$5{,}1 \cdot 10^{-2}$
3	2,45	$5{,}1 \cdot 10^{-4}$
4	2,4494897959	$5{,}3 \cdot 10^{-8}$
5	2,449489742783	$8{,}9 \cdot 10^{-16}$

INTERPRETIMI

Numri i shifrave të sakta afërsisht **dyfishohet** në çdo hap, sepse $e_{n+1} = \dfrac{e_n^2}{2a_n}$. Pas 4 hapash arrihet saktësia e numrave `float`; gabimi $8{,}9 \cdot 10^{-16}$ vjen nga rrumbullakimi i kompjuterit, jo nga metoda.

NË INFORMATIKË Python:

```
a = 3.0
for n in range(2, 6):
    a = (a + 6 / a) / 2
    print(n, a, abs(a - 6 ** 0.5))
```

Zbatimi 4: si “mëson” një model i inteligjencës artificiale?

SITUATA

Një model ka një parametër w. Gabimi i tij është $f(w) = (w-3)^2$, më i vogli për $w = 3$. Modeli nuk e di vlerën 3: e përmirëson w hap pas hapi.

MODELI: ZBRITJA E GRADIENTIT

$$w_{k+1} = w_k - \eta \cdot 2(w_k - 3)$$

$\eta > 0$ quhet **shpejtësia e të mësuarit**.

$2(w-3)$ është derivati i f; derivatet do t’i mësojmë më vonë.

ANALIZA

Për gabimin $e_k = w_k - 3$:

$$e_{k+1} = (1-2\eta)\, e_k \;\Rightarrow\; e_k = (1-2\eta)^k e_0.$$

Varg gjeometrik:

$$e_k \to 0 \iff |1-2\eta| < 1 \iff 0 < \eta < 1.$$

$\eta = 0{,}1$:	$q = 0{,}8$	konvergjon ngadalë
$\eta = 0{,}5$:	$q = 0$	në një hap
$\eta = 0{,}9$:	$q = -0{,}8$	me luhatje
$\eta = 1{,}1$:	$q = -1{,}2$	**divergjon**

INTERPRETIMI

Shpejtësi shumë e madhe e të mësuarit e **prish** mësimin: kjo është q^n me $|q| > 1$.

NË INFORMATIKË Python:

```
w, eta = 0.0, 0.1
for k in range(50):
    w = w - eta * 2 * (w - 3)
print(w)   # 2.99996...
```

Zbatimi 5: vargjet në grafikën kompjuterike

SITUATA

Trekëndëshi i Serpinskit: në çdo nivel, çdo trekëndësh zëvendësohet me 3 kopje me brinjë sa gjysma.

MODELI

Pas k niveleve:

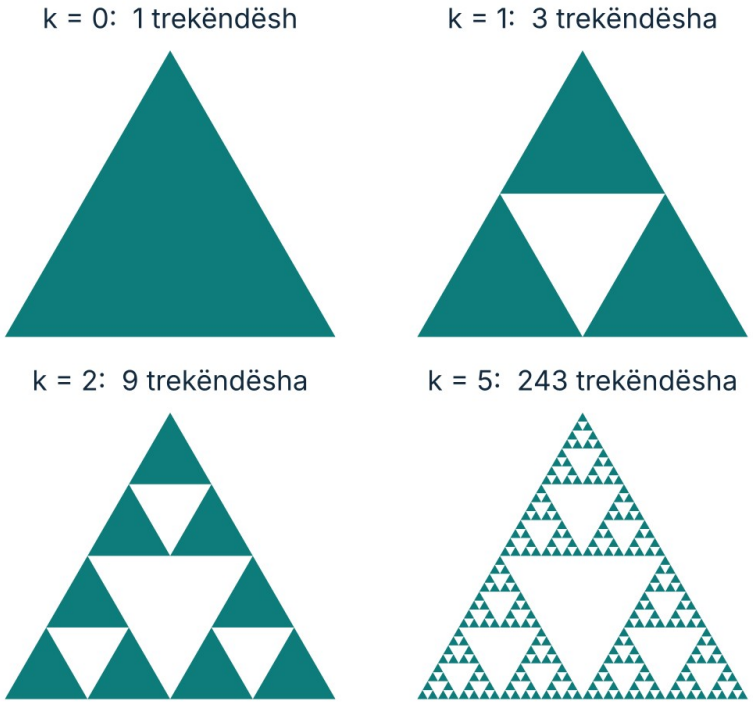
$$T_k = 3^k \text{ trekëndësha}, \quad s_k = \frac{s_0}{2^k}, \quad S_k = \left(\frac{3}{4}\right)^k S_0$$

ANALIZA

$3^k \to +\infty$, por $\left(\frac{3}{4}\right)^k \to 0$: pafundësisht shumë copa, sipërfaqe totale $\to 0$.

INTERPRETIMI

Me $s_0 = 1024$ piksel, te $k = 10$ brinja është 1 piksel: më tej nuk shihet asgjë e re. Programi ndalon te $k = 10$ ($3^{10} = 59\,049$ trekëndësha).



NË INFORMATIKË Python:

```
def serpinski(A, B, C, k):
    if k == 0: vizato(A, B, C); return
    AB, BC, CA = mes(A, B), mes(B, C), mes(C, A)
    serpinski(A, AB, CA, k - 1); serpinski(AB, B, BC, k - 1); serpinski(CA, BC, C, k - 1)
```

Zbatimi 6: kur duhet të ndalojë programi?

STRATEGJIA 1: $N(\varepsilon)$ PARAPRAKISHT

Kemi $a_n = 0{,}9^n \to 0$ dhe duam gabim $< \varepsilon = 10^{-6}$. Nga përkufizimi ε–N:

$$0{,}9^n < 10^{-6} \iff n > \frac{\ln 10^{-6}}{\ln 0{,}9} \approx 131{,}1.$$

Pra $N = 131$: programi e di **që më parë** sa hapa duhen.

STRATEGJIA 2: NDALIM KUR HAPI ËSHTË I VOGËL

Ndalojmë kur $|a_{n+1} - a_n| <$ tol. Te Heroni kjo është e justifikuar, sepse gabimi $\le$ hapi.

Por te $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ dështon: programi ndalon te $n \approx 10^6$ dhe "gjen" $H \approx 14{,}39$, ndërsa $H_n \to +\infty$ (shembulli 21).

INTERPRETIMI

Kriteri i ndalimit duhet **justifikuar matematikisht**. Përndryshe programi jep me siguri një përgjigje të gabuar.

NË INFORMATIKË Python:

```
H, n = 0.0, 0
while True:
    n += 1; H += 1 / n
    if 1 / n < 1e-6: break
print(n, H)   # 1000001  14.39...  (por H_n -> +inf!)
```

IV

Gabime tipike

Veprime dhe përfundime matematikisht të pajustifikuara, me kundërshembuj

Gabime tipike (1): veprimet

✗ "$\infty - \infty = 0$"	**Kundërshembull:** $n^2 - n \to +\infty$, jo 0.
✗ "$1^\infty = 1$"	**Kundërshembull:** $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$, jo 1.
✗ "$0 \cdot \infty = 0$"	**Kundërshembull:** $n \cdot \frac{1}{n} = 1 \to 1$; shembulli 7 jep $\frac{1}{2}$.
✗ "$\frac{\infty}{\infty} = 1$"	**Kundërshembull:** $\frac{2n}{n} \to 2$, $\frac{n^2}{n} \to +\infty$.
✗ "$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$" kur $\lim b_n = 0$	**Kundërshembull:** rregulli i herësit kërkon $\lim b_n \neq 0$.
✗ "çdo term $\to 0$, pra shuma $\to 0$"	**Kundërshembull:** shembulli 13: shuma e n termave $\to 1$.

Gabime tipike (2): logjika

KALIMI NË LIMIT PA PROVUAR EKZISTENCËN

$a_1 = 0$, $a_{n+1} = 1 - a_n$. "Kalojmë në limit": $L = 1 - L$, pra $L = \frac{1}{2}$?

Por vargu është $0, 1, 0, 1, \ldots$: **divergjent**. Kalimi në limit lejohet **vetëm pasi** provohet që limiti ekziston.

"HAPI $\to 0$, PRA KONVERGJON"

$a_n = \sqrt{n}$: $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \to 0$, por $\sqrt{n} \to +\infty$.

I njëjti mësim si te H_n: hapat e vegjël nuk mjaftojnë.

"$a_n < 1$, PRA $\lim a_n < 1$"

$a_n = \dfrac{n}{n+1} < 1$ për çdo n, por $\lim a_n = 1$. Në limit, "$<$" bëhet "$\leq$".

"I KUFIZUAR, PRA KONVERGJENT"

$(-1)^n$ dhe shembulli 20 janë të kufizuar, por divergjentë. Duhet edhe **monotonia** (Vajershtrasi).

V

Ushtrime për punë të pavarur

Niveli A: bazë · Niveli B: mesatar · Niveli C: i avancuar

Niveli A: llogarisni limitet

1. $\lim \dfrac{4n-1}{2n+5}$
2. $\lim \dfrac{n^2+1}{3n^2-n}$
3. $\lim \dfrac{5-2n^3}{n^3+n}$
4. $\lim \dfrac{n+7}{n^2+1}$
5. $\lim \dfrac{n^2-3}{n+2}$
6. $\lim \left(1+\dfrac{2}{n}\right)\left(3-\dfrac{1}{n^2}\right)$
7. $\lim \dfrac{3^n+1}{3^n}$
8. $\lim \dfrac{(-1)^n}{n^2}$
9. $\lim \left(0{,}9^n+\dfrac{1}{n}\right)$
10. $\lim \left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right)^2$

Niveli B (1): e konjuguara, fuqitë, shtrëngimi

11 $\lim \left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n}\right)$

12 $\lim \left(\sqrt{n^2+5n} - n\right)$

13 $\lim \left(n - \sqrt{n^2-2n}\right)$

14 $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+1}+n}{3n}$

15 $\lim \dfrac{2^n+5^n}{5^{n+1}-2^n}$

16 $\lim \dfrac{3^n-n}{3^{n+1}+2}$

Niveli B (2): shtrëngimi, numri e, monotonia

17 $\lim \dfrac{\sin(n^2)}{\sqrt{n}}$

18 $\lim \dfrac{n + \cos n}{2n - \sin n}$

19 $\lim \sqrt[n]{3^n + 4^n}$

20 $\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{3n}$

21 $\lim \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n}$

22 Studioni monotoninë dhe kufizueshmërinë e $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$. A konvergjon? Gjeni limitin.

Niveli C (1): prova dhe vargje rekurrente

23 Vërtetoni sipas përkufizimit ε–N që $\lim \dfrac{2n+3}{n+1} = 2$. Gjeni N për $\varepsilon = 0{,}01$ (konventa: $n > N$).

24 Provoni që vargu $a_n = \cos \dfrac{n\pi}{2}$ është divergjent.

25 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$. Provoni që vargu është rritës dhe i kufizuar nga 3, dhe gjeni limitin.

26 $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{3}{a_n}\right)$ (Heroni për $\sqrt{3}$). Provoni që $a_n \geq \sqrt{3}$, që vargu është zbritës, dhe gjeni limitin.

Niveli C (2): shuma, Koshi, informatikë

27 Me teoremën e shtrëngimit: $\lim \left(\dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n} \right)$.

28 Provoni që $a_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$ konvergjon. *Udhëzim:* $\dfrac{1}{k^2} \le \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$ *për* $k \ge 2$.

29 Një algoritëm kryen $T_n = n^2 + 100n$ veprime, një tjetër $S_n = 2^n$. Gjeni $\lim \dfrac{T_n}{S_n}$ dhe numrin më të vogël N të tillë që $S_n > T_n$ për çdo $n \ge N$.

30 Provoni që $a_n = \dfrac{\sin 1}{2} + \dfrac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \dfrac{\sin n}{2^n}$ është varg i Koshiut, pra konvergjent.

Niveli C (3): gjeni gabimin, zgjidhni kriterin

31

Gjeni gabimin. Një student shkroi:

$$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \left(\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^{n} = 1^{n} = 1.$$

Cili hap është i gabuar dhe pse? Cili është limiti i saktë?

32

Zgjidhni vetë kriterin (shtrëngimi, Vajershtrasi, nënvargjet, Koshi) dhe vendosni nëse vargu konvergjon:

(a) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,2^k},$ (b) $b_n = \sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n},$ (c) $c_n = \sqrt[n]{n+5}.$

VI

Përgjigjet

Kontrolloni punën tuaj. Në provim kërkohet zgjidhja e plotë, jo vetëm përgjigja.

Përgjigjet: niveli A dhe B

Nr.	Përgjigja	Nr.	Përgjigja
1	2	6	3
2	$\frac{1}{3}$	7	1
3	-2	8	0 (shtrëngimi)
4	0	9	0
5	$+\infty$	10	4

Nr.	Përgjigja	Nr.	Përgjigja
11	0	17	0
12	$\frac{5}{2}$	18	$\frac{1}{2}$
13	1	19	4
14	$\frac{2}{3}$	20	e^3
15	$\frac{1}{5}$	21	$\frac{1}{e}$
16	$\frac{1}{3}$	22	0

IDEJA KYÇE Te 8: $-\frac{1}{n^2} \le \frac{(-1)^n}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$.

IDEJA KYÇE Te 21: $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$.

Te 22: $a_1 = a_2 = 2$; për $n \ge 2$ **rreptësisht zbritës**. Pra **jorritës**.

Përgjigjet dhe udhëzime: niveli C (23–27)

Nr.	Përgjigja / udhëzimi
23	$\lvert a_n - 2\rvert = \dfrac{1}{n+1} < \varepsilon \iff n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$; për $\varepsilon = 0{,}01$: $N = 99$ (vlen për $n > 99$).
24	$a_{4k} = 1 \to 1$, $a_{2k-1} = 0 \to 0$: dy nënvargje me limite të ndryshme.
25	$a_n < 3$ dhe $a_{n+1}^2 - a_n^2 = (3 - a_n)(2 + a_n) > 0$; $L = \sqrt{6 + L} \Rightarrow \lim a_n = 3$.
26	mosbarazimi i mesatareve jep $a_{n+1} \geq \sqrt{3}$; $a_{n+1} - a_n = \dfrac{3 - a_n^2}{2a_n} \leq 0$; $\lim a_n = \sqrt{3}$.
27	$n \cdot \dfrac{n}{n^2 + n} \leq b_n \leq n \cdot \dfrac{n}{n^2 + 1}$; të dy kufijtë $\to 1$, pra $\lim = 1$ (shtrëngimi).

Përgjigjet dhe udhëzime: niveli C (28–32)

Nr.	Përgjigja / udhëzimi
28	rritës dhe $a_n \le 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) < 2$, pra konvergjent *(limiti është $\frac{\pi^2}{6}$, provohet më vonë)*.
29	$\lim \frac{T_n}{S_n} = 0$; $N = 11$ ($2^{10} = 1024 < 1100$, $2^{11} = 2048 > 1221$).
30	$\lvert a_m - a_n \rvert \le \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^m} < \frac{1}{2^n}$ për $m > n$, pra varg i Koshiut.
31	$(\lim a_n)^k$ lejohet vetëm për eksponent k **konstant**; këtu eksponenti është n. Limiti i saktë: e.
32	(a) rritës, $a_n < \sum \frac{1}{2^k} < 1$: konvergjent $(\to \ln 2)$; (b) $b_{4k+1} \to 1$, $b_{2k} \to 0$: divergjent; (c) $1 \le c_n \le \sqrt[n]{6}\,\sqrt[n]{n} \to 1$.

VII

Shtojcë: zgjidhje të plota

Ushtrimet 25, 26, 28, 30, 31 dhe 32, me argumentim të plotë

Zgjidhje e plotë: ushtrimet 25 dhe 26

USHTRIMI 25

$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$

Kufizueshmëria. Me induksion $0 < a_n < 3$: $a_1 = 1$; nëse $0 < a_n < 3$, atëherë $0 < a_{n+1} < \sqrt{9} = 3$.

Monotonia.

$a_{n+1}^2 - a_n^2 = 6 + a_n - a_n^2 = (3 - a_n)(2 + a_n) > 0,$

pra $a_{n+1} > a_n$ (të dy pozitivë).

Limiti. Vajershtrasi: ekziston $L \in [1; 3]$. Nga lema e rrënjës:

$L = \sqrt{6 + L} \Rightarrow L^2 - L - 6 = 0 \Rightarrow L = 3$ ose $L = -2$.

Meqë $L > 0$: $\lim a_n = 3$.

USHTRIMI 26

$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right)$

Me induksion $a_n > 0$.

Kufiri. Për $x, y > 0$: $\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$, sepse $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$. Me $x = a_n$, $y = \frac{3}{a_n}$ (prodhimi $xy = 3$):

$a_{n+1} = \frac{x + y}{2} \geq \sqrt{3}.$

Edhe $a_1 = 2 \geq \sqrt{3}$. Pra $a_n \geq \sqrt{3}$ për çdo n.

Monotonia.

$a_{n+1} - a_n = \frac{3 - a_n^2}{2a_n} \leq 0.$

Limiti. Ekziston $L \geq \sqrt{3} > 0$; meqë $L \neq 0$, kalojmë në limit: $L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{3}{L}\right) \Rightarrow L^2 = 3 \Rightarrow L = \sqrt{3}$.

Zgjidhje e plotë: ushtrimet 28 dhe 30

USHTRIMI 28

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

Monotonia. $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$: rritës.

Kufizueshmëria. Për $k \geq 2$:

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Shuma është teleskopike:

$$a_n \leq 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

Përfundimi. Rritës dhe i kufizuar nga lart $\Rightarrow$ konvergjent (Vajershtrasi).

Limiti është $\dfrac{\pi^2}{6}$ (Ojleri); kjo provohet më vonë.

USHTRIMI 30

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{2^k}$$

Për $m > n$, me $|\sin k| \leq 1$:

$$|a_m - a_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} \frac{\sin k}{2^k}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^n}.$$

Le të jetë $\varepsilon > 0$. Meqë $\left(\dfrac{1}{2}\right)^N \to 0$, zgjedhim N me $\dfrac{1}{2^N} < \varepsilon$. Atëherë për $m > n > N$:

$$|a_m - a_n| < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^N} < \varepsilon.$$

Pra (a_n) është varg i Koshiut, prandaj konvergjent.

Zgjidhje e plotë: ushtrimet 31 dhe 32

USHTRIMI 31: GJENI GABIMIN

Rregulli $a_n^k \to a^k$ vlen për eksponent k **të fiksuar**. Te $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ndryshojnë njëkohësisht edhe baza, edhe eksponenti: kjo është forma e pacaktuar 1^∞.

Hapi "$= \left(\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^n$" është i gabuar; madje ana e djathtë varet ende nga n.

Limiti i saktë: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e \approx 2{,}718.$

USHTRIMI 32: ZGJIDHNI KRITERIN

(a) Termat janë pozitivë, pra a_n rritës; $a_n \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} < 1$. *Vajershtrasi*: konvergjent *(limiti është* ln 2*)*.

(b) $b_{4k+1} = 1 + \frac{1}{4k+1} \to 1,\ b_{2k} = \frac{1}{2k} \to 0$. *Nënvargjet*: divergjent.

(c) $1 \le \sqrt[n]{n+5} \le \sqrt[n]{6n} = \sqrt[n]{6} \cdot \sqrt[n]{n} \to 1$ (për $n \ge 1$). *Shtrëngimi*: $c_n \to 1$.

IDEJA KYÇE Kriteri zgjidhet sipas formës së vargut: shumë me terma pozitivë → Vajershtrasi; luhatje → nënvargjet; rrënjë e n-të → shtrëngimi.